Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 11

Э. Б. Винберг

Симметрия многочленов

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2001

УДК 512.54+.62
В48
ББК 22.144

Аннотация

Как и плоские фигуры или пространственные тела, многочлены могут обладать симметрией. Тип симметрии какого-либо объекта определяется набором (группой) преобразований, которые его сохраняют. Например, так называемые симметрические многочлены — это многочлены, не изменяющиеся при любой перестановке переменных.

В брошюре рассказывается о том, как описываются многочлены с данным типом симметрии, и объясняется, для чего это может понадобиться. В частности, многочлены, обладающие симметрией правильных многогранников, применяются к построению эффективных приближённых формул интегрирования на сфере.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции, прочитанной автором для школьников 9–11 классов 28 октября 2000 года на малом мехмате МГУ.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей...

ISBN 5–900916–89–8

Винберг Эрнест Борисович

Симметрия многочленов

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»).
М.: МЦНМО, 2001. — 24 с.: ил.

Главный редактор серии *В. М. Тихомиров*.

Заведующая редакцией *В. Л. Браккер*.
Редакторы *Р. М. Кузнец*, *Е. Н. Осьмова*.
Художник *А. Ю. Шамшурина*. Техн. редактор *М. Ю. Панов*.

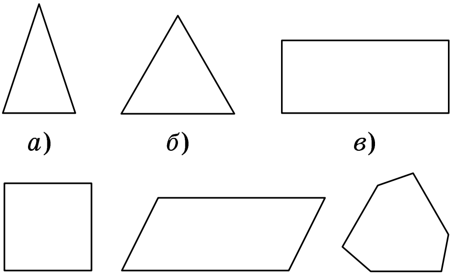
Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 23/IV 2001 года.
Формат бумаги $60 \times 88\ ^1/_{16}$. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 1,50.
Усл. печ. л. 1,50. Уч.-изд. л. 1,38. Тираж 3000 экз. Заказ 5376.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241–05–00.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ.
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554–21–86.

Симметрия геометрических фигур и группы движений плоскости

На рис. 1 изображены: *а*) равнобедренный треугольник, *б*) равносторонний треугольник, *в*) прямоугольник, *г*) квадрат, *д*) параллелограмм и *е*) шестиугольник, полученный из равностороннего треугольника срезанием его вершин «наискосок». Все эти фигуры обладают какой-то симметрией. Можно ли сказать, что одна из этих фигур более симметрична, чем другая? И что бы это могло означать?



а) *б*) *в*) *г*) *д*) *е*)

Рис. 1

Мы говорим, что плоская фигура F симметрична, если существует нетривиальное (т. е. отличное от тождественного) движение плоскости, переводящее фигуру F в себя. То насколько фигура F симметрична, определяется совокупностью всех таких движений. Например, равнобедренный треугольник переходит в себя при отражении относительно его высоты, а равносторонний треугольник переходит в себя при отражениях относительно всех его высот, а также при поворотах на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$. Поэтому равносторонний треугольник, несомненно, более симметричен, чем просто равнобедренный.

Совокупность $\operatorname{Sym} F$[1]) всех движений, переводящих фигуру F в себя, называется *группой симметрии* фигуры F. Эта совокупность, очевидно, обладает следующими свойствами:

1) Она содержит тождественное преобразование id[2]):

$$\mathrm{id} \in \operatorname{Sym} F.$$

2) Если движение φ переводит фигуру F в себя, то и обратное ему движение φ^{-1} переводит её в себя:

$$\varphi \in \operatorname{Sym} F \quad \Rightarrow \quad \varphi^{-1} \in \operatorname{Sym} F.$$

3) Если ψ и φ переводят F в себя, то их произведение — такое движение $\varphi \circ \psi$, что $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ (т. е. результат последовательного

[1]) От англ. «symmetry» — симметрия.
[2]) От англ. «identity» — тождественность, идентичность.

выполнения движений ψ и φ: сначала ψ, затем φ) — тоже переводит F в себя:

$$\varphi \in \mathrm{Sym}\,F,\ \ \psi \in \mathrm{Sym}\,F \quad \Rightarrow \quad \varphi \circ \psi \in \mathrm{Sym}\,F.$$

Всякое множество движений плоскости, обладающее этими тремя свойствами, называется *группой движений*.

Рассмотрим всевозможные движения плоскости: повороты, параллельные переносы, отражения...

Теорема I. Все движения плоскости, переводящие в себя ограниченную фигуру (например многоугольник), оставляют на месте некоторую точку.

Доказательство. Всякое движение, переводящее в себя фигуру F, оставляет на месте центр тяжести этой фигуры. □

Вследствие этого будем в дальнейшем рассматривать только движения, имеющие неподвижную точку.

Теорема II. Всякое движение плоскости, оставляющее на месте точку, есть либо поворот Π_α на угол α вокруг этой точки, либо отражение R_l относительно прямой l, проходящей через эту точку.

Замечание. Под поворотом на положительный угол α понимается поворот на угол α в положительном направлении, которым обычно считается направление против часовой стрелки. Можно предполагать, что $\alpha < 2\pi$, но удобно определить Π_α для любого $\alpha > 0$, считая, что $\Pi_{\alpha+2\pi} = \Pi_\alpha$. Удобно также определить Π_0 как тождественное преобразование и Π_α при отрицательном α как поворот на угол $|\alpha|$ в отрицательном направлении. При этом будет верно, что $\Pi_{\alpha+2\pi} = \Pi_\alpha$ для любого α. Всякий поворот можно однозначно представить как Π_α, где $-\pi < \alpha \leqslant \pi$ (или $0 \leqslant \alpha < 2\pi$).

Доказательство теоремы II. Движение однозначно определяется образом каких-либо трёх точек, не лежащих на одной прямой. Пусть движение φ оставляет на месте точку O. Возьмём какую-либо точку A, отличную от O, и точку B, не лежащую на прямой OA. Пусть $\varphi(A) = A'$ и $\varphi(B) = B'$. Обозначим угол AOA' через α (со знаком плюс, если поворот от OA к OA' происходит против часовой стрелки, и со знаком минус — в противном случае). Так как треугольники OAB и $OA'B'$ равны, то возможны лишь два случая, изображённые на рис. 2. В первом случае φ — поворот на угол α вокруг точки O, во втором — отражение относительно биссектрисы угла AOA'. □

Составим таблицу умножения движений, имеющих общую неподвижную точку O.

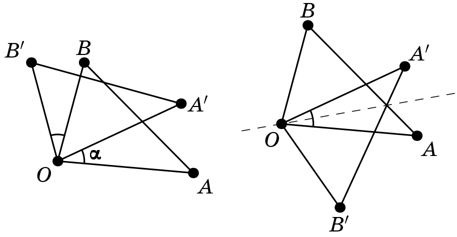


Рис. 2

Последовательное выполнение двух поворотов — это то же, что выполнение поворота на суммарный угол, поэтому

$$\Pi_\alpha \circ \Pi_\beta = \Pi_{\alpha+\beta}. \qquad (1)$$

Если перемножить отражение относительно некоторой прямой l и поворот на угол α, получится отражение. Действительно, поворот сохраняет ориентацию плоскости, а отражение меняет её: если задана окружность и направление её обхода, то при повороте это направление сохраняется, а при отражении — изменяется на противоположное. Если сначала сделать преобразование, меняющее ориентацию, а потом преобразование, сохраняющее ориентацию, в результате ориентация плоскости изменится. Таким образом, произведение отражения и поворота есть отражение, и остаётся понять, относительно какой прямой.

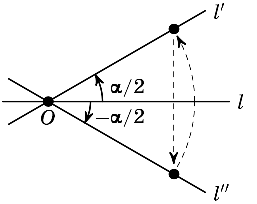


Рис. 3

Рассмотрим прямую l', которая получается из прямой l поворотом на угол $\alpha/2$, и прямую l'', которая получается поворотом на угол $-\alpha/2$ (рис. 3). Возьмём произвольную точку на прямой l' и отразим её относительно l. Мы получим точку на прямой l''. Повернув эту точку на угол α, получим исходную точку. Итак, точки прямой l' неподвижны при этом преобразовании. Значит, это преобразование есть отражение относительно прямой l'. Итак,

$$\Pi_\alpha \circ R_l = R_{l'}. \qquad (2)$$

Теперь перемножим те же движения в другом порядке. Если точку прямой l'' повернуть на угол α, а затем отразить относительно прямой l, она вернётся на место, поэтому

$$R_l \circ \Pi_\alpha = R_{l''}. \tag{3}$$

Произведение двух отражений R_l и R_m — это поворот: если дважды изменить ориентацию плоскости, в результате она не изменится. Остаётся определить угол поворота, а для этого достаточно проследить за одной точкой. Пусть угол между прямыми l и m равен α. Рассмотрим точку на прямой l. При отражении относительно l она останется на месте, а при отражении относительно m — окажется на прямой, образующей с l угол 2α (рис. 4). Таким образом,

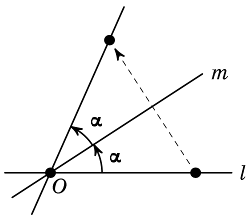


Рис. 4

$$R_m \circ R_l = \Pi_{2\alpha}. \tag{4_1}$$

Заметим, что таким же образом показывается, что

$$R_l \circ R_m = \Pi_{-2\alpha}. \tag{4_2}$$

Группы C_n и D_n

Группа C_n — это группа поворотов вокруг некоторой точки O на углы, кратные $2\pi/n$, т. е. на углы вида $2\pi k/n$ (можно считать, что $k = 0, 1, \ldots, n-1$: если k увеличить или уменьшить на n, получится такой же поворот).

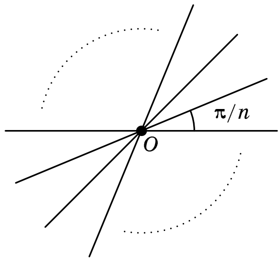


Рис. 5

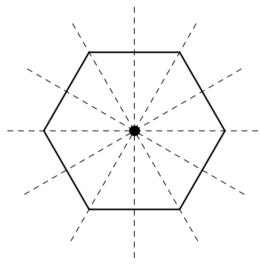


Рис. 6

Группа D_n состоит из всех поворотов, входящих в C_n, и n отражений относительно прямых, проходящих через точку O и образующих разбиение полного угла на углы, равные π/n (рис. 5). Группа D_n совпадает с группой симметрии правильного n-угольника с центром в точке O. Например, группа симметрии правильного шестиугольника состоит из шести поворотов на углы, кратные $\pi/3$, и шести отражений — относительно прямых, проходящих через противоположные вершины, и прямых, проходящих через середины противоположных сторон этого шестиугольника (рис. 6).

Число элементов конечной группы G называется её *порядком* и обозначается $|G|$. Таким образом,

$$|C_n| = n, \quad |D_n| = 2n.$$

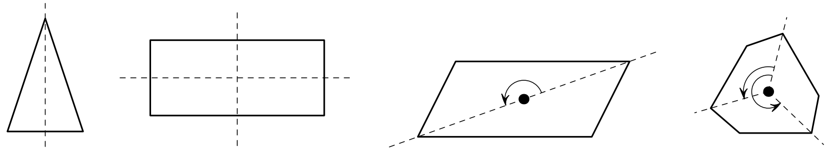
Теорема III. Всякая конечная группа движений плоскости, сохраняющих некоторую точку O, есть либо C_n, либо D_n для некоторого натурального n.

Доказательство. Предположим вначале, что наша группа (назовём её G) состоит только из поворотов, и пусть α — наименьший положительный угол, поворот на который принадлежит G. Очевидно, что группа G содержит повороты на все углы, кратные α. Докажем, что она не содержит никаких других поворотов. Предположим противное, а именно пусть G содержит поворот на угол β, не кратный α. Представим угол β в виде $\beta = k\alpha + \gamma$, где k — целое число, а γ — положительный угол, строго меньший α. Поскольку $\Pi_\gamma = \Pi_\beta \circ \Pi_{k\alpha}^{-1}$, поворот на угол γ также принадлежит группе G, но это противоречит тому, что α — наименьший положительный угол, поворот на который принадлежит группе G. Таким образом, группа G содержит только повороты на углы, кратные α. В частности, поскольку G содержит поворот на угол 2π (являющийся тождественным преобразованием), то $2\pi = n\alpha$ для некоторого натурального n. Это означает, что $G = C_n$.

Пусть теперь группа G содержит отражения. Все повороты, принадлежащие G, образуют группу движений — т. е. совокупность этих поворотов обладает свойствами 1)–3) (см. с. 3), — которая по доказанному есть группа C_n для некоторого натурального n. Если группа G содержит отражение относительно некоторой прямой l, то, согласно формуле (2), она содержит также отражения относительно всех прямых, образующих с l углы, кратные π/n, т. е. G содержит группу D_n. С другой стороны, если G содержит отражение относительно прямой m, образующей с l угол β, то, согласно формуле (4_1), она содержит поворот на угол 2β, откуда следует, что угол β кратен π/n. Таким образом, $G = D_n$. □

В частности, группа симметрии любого многоугольника есть одна из этих групп: либо C_n, либо D_n. Давайте выясним, какими группами симметрии обладают многоугольники, изображённые на рис. 1.

Проще всего с равносторонним треугольником и квадратом: это правильные многоугольники и их группами симметрии являются, соответственно, D_3 и D_4. Равнобедренный, но не равносторонний треугольник имеет единственную ось симметрии (рис. 7, *а*), поэтому его группа симметрии — это D_1 (она состоит из этой симметрии и тождественного преобразования). У прямоугольника, не являющегося квадратом, ровно две оси симметрии (рис. 7, *б*), и его группа симметрии есть D_2 (кроме отражений относительно этих осей она содержит тождественное преобразование, т. е. поворот на угол 0, и центральную симметрию, т. е. поворот на угол π). Произвольный параллелограмм не имеет осей симметрии, он выдерживает лишь повороты на углы 0 и π, т. е. углы, кратные $2\pi/2$ (рис. 7, *в*). Следовательно, группа симметрии параллелограмма есть C_2. Наконец, группа симметрии шестиугольника, полученного из равностороннего треугольника срезанием вершин, состоит из поворотов на углы, кратные $2\pi/3$ (рис. 7, *г*), т. е. это группа C_3.



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 7

Теперь можно, хотя и условно, назвать более симметричной ту из двух фигур, у которой порядок группы симметрии больше. Тогда, например, прямоугольник более симметричен, чем треугольник со срезанными углами.

Запись движений в координатах

Введём на плоскости обычную декартову систему координат и посмотрим, куда переходит точка (x, y) при повороте на угол α вокруг начала координат и при отражении относительно прямой l, проходящей через начало координат.

Для этого удобно воспользоваться *полярными координатами*. Каждой точке плоскости можно сопоставить *полярный радиус* r — расстояние от данной точки до начала координат — и *полярный угол* φ — угол, который образует её радиус-вектор с положительным направлением оси Ox (рис. 8). Пара (r, φ) — это и есть полярные координаты точки. Декартовы координаты можно выразить через полярные: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

При повороте точки на угол α её полярный радиус не изменяется, а полярный угол увеличивается на α. Поэтому

$$\Pi_\alpha(x, y) = \Pi_\alpha(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = \\ = (r\cos(\varphi+\alpha),\ r\sin(\varphi+\alpha)).$$

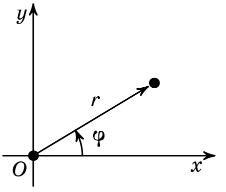


Рис. 8

По формулам для синуса и косинуса суммы углов получаем:

$$\Pi_\alpha(x, y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

Таким образом, поворот — это линейное преобразование: координаты образа точки являются линейными функциями от координат самой точки.

Записать в координатах отражение несложно, если вспомнить, что отражение относительно прямой l, образующей угол $\alpha/2$ с осью Ox, есть произведение отражения относительно оси Ox и поворота на угол α:

$$\mathrm{R}_l = \Pi_\alpha \circ \mathrm{R}_{Ox}.$$

Отражение относительно оси Ox в координатах — это просто умножение y на (-1). Поэтому

$$\mathrm{R}_l(x, y) = \Pi_\alpha(\mathrm{R}_{Ox}(x, y)) = \Pi_\alpha(x, -y),$$

и, следовательно,

$$\mathrm{R}_l(x, y) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ x\sin\alpha - y\cos\alpha).$$

Это преобразование тоже линейно.

Симметрия многочленов от двух переменных

Всякое движение плоскости или прямой преобразует не только точки, но и функции. Например, сдвиг прямой на a, переводящий точку x в точку $x+a$, переводит функцию $f(x)$ в функцию $f_a(x) = f(x-a)$, график которой получается из графика функции $f(x)$ сдвигом на a вдоль оси x. Аналогично, всякое движение φ плоскости переводит функцию $f(x, y)$ в функцию $f_\varphi(x, y) = f(x', y')$, где (x', y') — прообраз точки (x, y) при движении φ (т. е. образ точки (x, y) при обратном движении). Иначе говоря, правило таково: значение преобразованной функции в преобразованной точке равно значению исходной функции в исходной точке.

В частности, если φ — движение плоскости, оставляющее на месте начало координат, а f — многочлен, то, как следует из записи движений в координатах, f_φ — также многочлен. Более того, если f — однородный многочлен степени m (т. е. все его члены имеют степень m), то и f_φ — однородный многочлен степени m.

Будем говорить, что многочлен f переходит в себя (*инвариантен*) при движении φ, если $f_\varphi = f$, т. е. если значение многочлена f в любой точке p такое же, как и в точке $\varphi(p)$. Как и в случае геометрических фигур, совокупность $\operatorname{Sym} f$ всех движений, переводящих в себя многочлен f, является группой движений. Группа $\operatorname{Sym} f$ называется *группой симметрии многочлена* f.

Можно задать какую-либо группу движений плоскости и посмотреть, какие многочлены будут инвариантны относительно этой группы.

Симметрические многочлены

Рассмотрим группу D_1. Она состоит из тождественного преобразования и отражения. Будем считать, что это отражение относительно биссектрисы первой координатной четверти, т. е. прямой $y = x$. При таком отражении координаты точки меняются местами: точка (x, y) переходит в точку (y, x).

Многочлен f называется *симметрическим*, если $f(y, x) = f(x, y)$ для любых x и y, т. е. если он инвариантен относительно группы D_1.

Покажем, как устроены симметрические многочлены. Введём новую систему координат: $u = x + y$, $v = x - y$. Тогда, подставив $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ в многочлен $f(x, y)$, получим многочлен от переменных u, v, который обозначим $\widetilde{f}$:

$$f(x, y) = \widetilde{f}(u, v).$$

Когда x и y меняются местами, u не меняется, а v умножается на (-1). Значит, если $f(y, x) = f(x, y)$, то $\widetilde{f}(u, -v) = \widetilde{f}(u, v)$. Следовательно, переменная v входит в многочлен $\widetilde{f}$ только в чётных степенях, другими словами, $\widetilde{f}$ на самом деле многочлен от u и v^2:

$$\widetilde{f}(u, v) = \widetilde{F}(u, v^2).$$

Перейдя снова к исходным координатам, мы получаем, что

$$f(x, y) = \widetilde{F}(x + y,\ (x - y)^2).$$

Но $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$, поэтому исходный многочлен f можно представить в виде многочлена от суммы и произведения x и y:

$$f(x, y) = F(x + y,\ xy).$$

Многочлены $\boldsymbol{\sigma}_1 = x + y$ и $\boldsymbol{\sigma}_2 = xy$ называются *элементарными симметрическими многочленами* от двух переменных. Таким образом, любой симметрический многочлен от двух переменных представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Рассмотрим в качестве примера симметрические многочлены $s_n = x^n + y^n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Имеем:

$$s_n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}) = \boldsymbol{\sigma}_1 s_{n-1} - \boldsymbol{\sigma}_2 s_{n-2},\quad n \geqslant 2.$$

Это рекуррентная формула. Она позволяет, зная s_0 и s_1, постепенно, одно за другим получать явные выражения через $\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\boldsymbol{\sigma}_2$ для всех s_n. Выпишем несколько первых выражений:

$$\begin{aligned}
&s_0 = 2 \quad (\text{так как } x^0 = y^0 = 1),\\
&s_1 = \boldsymbol{\sigma}_1,\\
&s_2 = \boldsymbol{\sigma}_1^2 - 2\boldsymbol{\sigma}_2,\\
&s_3 = \boldsymbol{\sigma}_1^3 - 3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2,\\
&s_4 = \boldsymbol{\sigma}_1^4 - 4\boldsymbol{\sigma}_1^2\boldsymbol{\sigma}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Этими выражениями можно воспользоваться, например, для решения систем алгебраических уравнений, симметричных относительно перестановки x и y. Решим, например, систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3,\\ x^3 + y^3 = 4. \end{cases}$$

Выразим левые части уравнений через $\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\boldsymbol{\sigma}_2$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_1^2 - 2\boldsymbol{\sigma}_2 = 3,\\ \boldsymbol{\sigma}_1^3 - 3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = 4. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем: $\boldsymbol{\sigma}_2 = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_1^2 - 3}{2}$; тогда второе уравнение даёт

$$\boldsymbol{\sigma}_1^3 - \frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{\sigma}_1^2 - 3) = 4, \qquad \boldsymbol{\sigma}_1^3 - 9\boldsymbol{\sigma}_1 + 8 = 0.$$

Сразу видно одно решение $\boldsymbol{\sigma}_1 = 1$, откуда $\boldsymbol{\sigma}_2 = -1$. Сумма x и y равна 1, произведение равно (-1); следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, x и y — корни квадратного уравнения $t^2 - t - 1 = 0$. Решив это уравнение, можно найти два решения, отличающиеся перестановкой x и y. Сделать это, а также найти остальные решения, соответствующие другим значениям σ_1, предоставляется читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим теперь многочлены, у которых симметрия более сложная.

Многочлены, инвариантные относительно C_n

Напомним, что группа C_n состоит из поворотов вокруг какой-то точки O на углы, кратные $2\pi/n$. Будем считать, что O — начало координат. Для того чтобы выяснить, какие многочлены выдерживают эти повороты, воспользуемся полярными координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

При поворотах r не изменяется, но r — это не многочлен. А вот r^2 — многочлен ($r^2 = x^2 + y^2$), инвариантный относительно группы C_n. Функции $r^n \cos n\varphi$ и $r^n \sin n\varphi$ также не изменяются при повороте на угол, кратный $2\pi/n$: при таком повороте к $n\varphi$ добавляется угол, кратный 2π. Менее очевиден такой факт:

> **Теорема IV.** Функции $r^n \cos n\varphi$ и $r^n \sin n\varphi$ ($n \geqslant 1$) суть однородные многочлены степени n от x и y.

Эту теорему легко доказать по индукции, но мы рассмотрим лишь несколько первых таких функций:

$$r\cos\varphi = x,$$
$$r\sin\varphi = y;$$

$$r^2\cos 2\varphi = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = x^2 - y^2,$$
$$r^2\sin 2\varphi = 2r^2\cos\varphi\sin\varphi = 2xy;$$

$$\begin{aligned} r^3\cos 3\varphi &= r^3(\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi) = \\ &= (x^2 - y^2)x - 2xy\cdot y = x^3 - 3xy^2, \\ r^3\sin 3\varphi &= r^3(\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi) = \\ &= 2xy\cdot x + (x^2 - y^2)y = 3x^2y - y^3; \end{aligned}$$

. . . .

(здесь мы использовали формулы для синуса и косинуса суммы углов). Ясно, что и дальше будут получаться многочлены от x и y.

Таким образом, всякий многочлен от r^2, $r^n \cos n\varphi$ и $r^n \sin n\varphi$ есть многочлен от x и y, инвариантный относительно C_n. Верно и обратное:

Теорема V. Всякий многочлен, инвариантный относительно группы C_n, есть многочлен от r^2, $r^n \cos n\varphi$ и $r^n \sin n\varphi$.

МНОГОЧЛЕНЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО D_n

Будем считать, что D_n содержит отражение относительно оси Ox.

Всякий многочлен, инвариантный относительно D_n, инвариантен и относительно C_n, поскольку $C_n \subset D_n$; значит, он является многочленом от r^2, $r^n \cos n\varphi$ и $r^n \sin n\varphi$. Он должен также выдерживать все отражения, входящие в D_n, но достаточно, чтобы он выдерживал какое-нибудь одно отражение, например R_{Ox}, потому что все остальные отражения являются произведениями этого отражения и некоторого поворота из C_n.

Отражение относительно оси Ox в полярных координатах — это умножение φ на (-1), поэтому при таком отражении

$$r^2 \mapsto r^2,$$
$$r^n \cos n\varphi \mapsto r^n \cos n\varphi,$$
$$r^n \sin n\varphi \mapsto -r^n \sin n\varphi$$

(символ «$\mapsto$» означает «переходит в», «отображается в»). Следовательно, если многочлен

$$f(x, y) = \widetilde{F}(r^2,\ r^n \cos n\varphi,\ r^n \sin n\varphi)$$

инвариантен относительно R_{Ox}, то $r^n \sin n\varphi$ входит в него только в чётных степенях, и

$$\widetilde{F}(r^2,\ r^n \cos n\varphi,\ r^n \sin n\varphi) = \widehat{F}(r^2,\ r^n \cos n\varphi,\ (r^n \sin n\varphi)^2).$$

Но $(r^n \sin n\varphi)^2 = (r^2)^n - (r^n \cos n\varphi)^2$, поэтому на самом деле

$$\widehat{F}(r^2,\ r^n \cos n\varphi,\ (r^n \sin n\varphi)^2) = F(r^2,\ r^n \cos n\varphi).$$

Итак, мы доказали (точнее, вывели из предыдущей) такую теорему:

Теорема VI. Всякий многочлен, инвариантный относительно группы D_n, есть многочлен от r^2 и $r^n \cos n\varphi$.

А теперь рассмотрим одно приложение этой теории.

Квадратурные формулы

Квадратурные формулы — это формулы приближённого интегрирования. Мы будем вначале интегрировать функцию по окружности единичного радиуса.

Квадратурные формулы на окружности

Рассмотрим непрерывную функцию от двух переменных $f(x, y)$. Обозначим через

$$\oint f(x, y)\, ds$$

её интеграл по единичной окружности с центром в начале координат (здесь ds — длина «бесконечно малой дуги» окружности). Поясним, что это такое. Запишем функцию f в полярных координатах. Тогда на единичной окружности она превратится в функцию одной переменной φ: $f(x, y) = f(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$. По определению, интеграл функции f по окружности равен обычному определённому интегралу полученной указанным образом функции одной переменной по отрезку $[0, 2\pi]$:

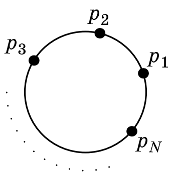


Рис. 9

$$\oint f(x, y)\, ds = \int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Мы хотим вычислить этот интеграл приближённо через значения функции f в некоторых точках окружности, причём точек должно быть не очень много, а результат — как можно точнее.

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$ — точки на единичной окружности (рис. 9). Интеграл приближённо заменяем суммой значений функции в этих точках с коэффициентом:

$$\oint f(x, y) ds \approx S(f) = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^{N} f(p_i), \qquad (*)$$

где $f(p_i) = f(x_i, y_i)$, (x_i, y_i) — координаты точки p_i. Коэффициент $\frac{2\pi}{N}$ нужен для того, чтобы приближённое равенство было точным хотя бы для $f(x, y) \equiv 1$.

Формула вида (*) называется *квадратурной формулой*. Естественно, эта формула зависит от выбора точек $p_1, p_2, \ldots, p_N$.

Будем говорить, что квадратурная формула (*) имеет *порядок* k, если она точна для всех многочленов степени не выше k.

Почему имеет смысл рассматривать именно многочлены?

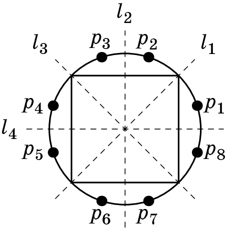
Теорема VII (Вейерштрасс). Для любой непрерывной функции $f(x,y)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $f_\varepsilon(x,y)$, что

$$|f(p) - f_\varepsilon(p)| < \varepsilon$$

для любой точки p на окружности.

(На самом деле эта теорема верна не только для окружности, но и для любого замкнутого ограниченного множества на плоскости.)

Итак, непрерывную функцию на окружности можно с любой точностью приблизить многочленом, так что интеграл от данной функции и интеграл от этого многочлена будут отличаться мало. Если функция f сама не является многочленом, то, чем меньше ε, тем больше будет степень многочлена f_ε. Поэтому, чем больше порядок квадратурной формулы, тем лучше.



$p_1 = \mathrm{id}(p_1)$, $\quad p_5 = \Pi_\pi(p_1)$,

$p_2 = \mathrm{R}_{l_1}(p_1)$, $\quad p_6 = \mathrm{R}_{l_3}(p_1)$,

$p_3 = \Pi_{\pi/2}(p_1)$, $\quad p_7 = \Pi_{3\pi/2}(p_1)$,

$p_4 = \mathrm{R}_{l_2}(p_1)$, $\quad p_8 = \mathrm{R}_{l_4}(p_1)$.

Рис. 10

Ключевая идея такова: точки $p_1, p_2, \ldots, p_N$ нужно выбирать специальным образом, а именно они должны составлять орбиту группы D_n. Это означает, что, взяв любую из этих точек и применив к ней все преобразования из D_n, мы получим в точности все точки $p_1, p_2, \ldots, p_N$.

Например, на рис. 10 изображена орбита группы D_4. Если мы возьмём в качестве точки p_1 вершину квадрата или точку на прямой, проходящей через середины противоположных сторон, то орбита точки p_1 (т. е. орбита, содержащая точку p_1), будет состоять только из четырёх точек. Но если точка p_1 *общего положения*, точек будет восемь.

Орбита общего положения группы D_n содержит $2n$ точек, т. е. $N = 2n$.

Теорема VIII. Пусть точки $p_1, p_2, \ldots, p_N$ составляют орбиту группы D_n. Квадратурная формула (*) точна для всех многочленов степени не выше k тогда и только тогда, когда она точна для всех многочленов степени не выше k, инвариантных относительно группы D_n.

Доказательство. Очевидно, если формула точна для всех многочленов степени не выше k, то она будет точна и для инвариантных многочленов степени не выше k. Пусть, обратно, формула (*) точна для любого многочлена степени не выше k, инвариантного относительно группы D_n. Пусть $f(p)$ — произвольный многочлен степени не выше k. Подвергнем этот многочлен какому-нибудь движению из группы D_n. Поскольку координаты образа точки при движении являются линейными функциями координат самой точки, при подстановке этих функций в многочлен получается многочлен той же степени. Очевидно, что интеграл от нового многочлена по единичной окружности с центром в начале координат равен интегралу от исходного многочлена: окружность переходит в себя при любом движении, оставляющем на месте её центр, и длина дуги при этом сохраняется.

Занумеруем элементы группы D_n:

$$D_n = \{g_1, g_2, \ldots, g_{2n}\}.$$

Для каждого $i = 1, \ldots, 2n$ многочлен $f_{g_i}(p) = f(g_i^{-1}(p))$ обозначим через $f_i(p)$. Тогда

$$\oint f(p)\, ds = \oint f_i(p)\, ds.$$

Возьмём теперь среднее арифметическое этих интегралов:

$$\oint f(p)\, ds = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \oint f_i(p)\, ds = \oint \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f_i(p)\, ds = \oint \bar{f}(p)\, ds,$$

где

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f_i(p).$$

Многочлен $\bar{f}(p)$ инвариантен относительно группы D_n, потому что при любом движении из этой группы многочлены $f_1(p), \ldots, f_{2n}(p)$ просто как-то переставляются, а их сумма не изменяется. Степень многочлена $\bar{f}$ не больше степени многочлена f; значит, по условию теоремы интеграл от $\bar{f}$ может быть вычислен с помощью квадратурной формулы (*):

$$\oint \bar{f}(p) ds = S(\bar{f}).$$

Аналогично, $S(f) = S(f_i)$, поскольку любое движение из группы D_n просто переставляет точки $p_1, p_2, \ldots, p_N$, так что сумма значений многочлена f в этих точках равна сумме значений многочлена f_i в этих точках. Следовательно,

$$S(f) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} S(f_i) = S(\bar{f}) = \oint \bar{f}(p)\, ds = \oint f(p)\, ds. \qquad \square$$

Теперь можно определить порядок квадратурной формулы (*). Мы знаем, что все многочлены, инвариантные относительно группы D_n, выражаются через многочлены r^2 и $r^n \cos n\varphi$. На единичной окружности $r^2 \equiv 1$, поэтому об этом многочлене можно не беспокоиться.

За счёт выбора точки p_1 можно добиться того, чтобы и для многочлена $r^n \cos n\varphi$ формула (*) была точна. А именно, возьмём

$$p_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}\right).$$

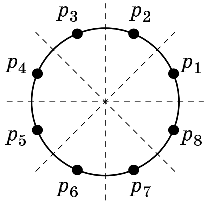


Рис. 11

Тогда точки p_1, ..., p_N будут делить окружность на $N = 2n$ равных частей (см. рис. 11, где изображён случай $n = 4$).

При таком выборе p_1

$$S(r^n \cos n\varphi) = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} \cos n\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{i\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right) = 0.$$

В то же время

$$\oint r^n \cos n\varphi \, ds = 0,$$

так как при повороте окружности на угол π/n интеграл, с одной стороны, не должен измениться (похожее рассуждение уже использовалось при доказательстве теоремы VIII), а с другой стороны, должен умножиться на (-1), поскольку подынтегральная функция умножается на (-1).

Следующее препятствие — многочлен $(r^n \cos n\varphi)^2$ степени $2n$. Можно показать, что оно непреодолимо, т. е. за счёт выбора точки p_1 нельзя добиться того, чтобы и для этого многочлена квадратурная формула (*) была точна. Таким образом, $2n$ равноотстоящих точек на окружности дают квадратурную формулу порядка $2n-1$. Этот результат не является неожиданным и мог бы быть получен более простым способом. (Во всяком случае, интуитивно очевидно, что наиболее выгодно выбирать на окружности именно равноотстоящие точки.) Однако в более сложных ситуациях изложенные методы позволяют получить совсем не очевидные результаты. Так обстоит дело, например, с квадратурными формулами на сфере. Многие результаты в этой области были получены совсем недавно. Чтобы рассказать об этих формулах, нам понадобятся сведения о конечных группах движений трёхмерного пространства.

Правильные многогранники

Правильные многогранники — это многогранники, обладающие наибольшей симметрией.

Назовём *флагом* набор

(вершина многогранника;

ребро, выходящее из этой вершины;

грань, примыкающая к этому ребру)

(рис. 12). Многогранник называется *правильным*, если для любых флагов F_1 и F_2 существует движение, переводящее многогранник в себя и флаг F_1 во флаг F_2.

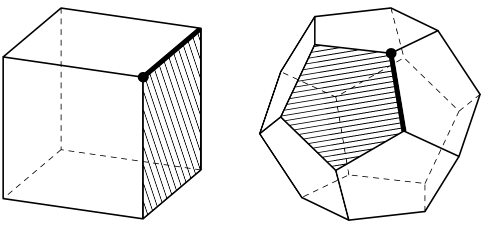


Рис. 12

Ясно, что такое движение единственно: после того как мы задали, куда переходит одна вершина, возможны ещё повороты вокруг прямой, проходящей через образ этой вершины, и отражения относительно плоскостей, проходящих через него; если мы также задали, куда переходит ребро, остаётся только отражение относительно плоскости, проходящей через образ этого ребра; когда мы задали, куда переходит прилегающая к этому ребру грань, движение уже определено однозначно.

Отсюда следует, что порядок группы $\mathrm{Sym}\,P$ симметрии правильного многогранника P равен количеству его флагов. Действительно, зафиксируем флаг F_0. Тогда каждому флагу F можно поставить в соответствие единственное движение, переводящее многогранник в себя, а флаг F_0 — в F. Очевидно, что число флагов в многограннике равно числу вершин, умноженному на число рёбер, выходящих из каждой вершины, и на 2 — число граней, примыкающих к каждому ребру.

Существует только пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (рис. 13). Куб и октаэдр имеют одну и ту же группу симметрии, потому что, если взять центры

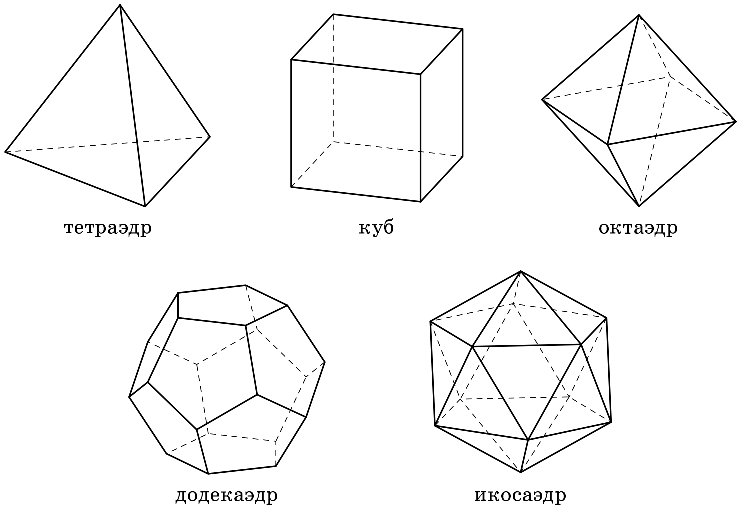


Рис. 13

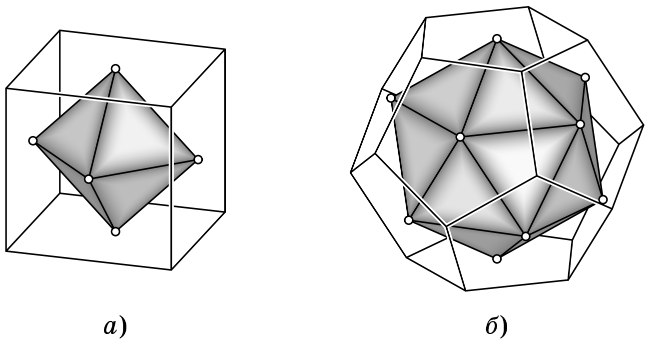


Рис. 14

граней куба и «натянуть» на них многогранник, получится октаэдр (рис. 14, *а*), и, наоборот, центры граней октаэдра являются вершинами куба. По той же причине додекаэдр и икосаэдр тоже имеют одинаковые группы симметрии (рис. 14, *б*).

Таким образом, возникают три различные группы движений, которые обозначаются T, O и I (от слов «тетраэдр», «октаэдр» и «икосаэдр»). Подсчитаем порядки этих групп. У тетраэдра 4 вершины, из каждой вершины выходит 3 ребра, поэтому $|T| = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$. У куба 8 вершин, из каждой выходит 3 ребра, так что $|O| = 8\cdot 3\cdot 2 = 48$. «Икосаэдр» в переводе с греческого означает «двадцатигранник», а число вершин додекаэдра равно числу граней икосаэдра, значит, у додекаэдра 20 вершин. Из каждой вершины додекаэдра также выходит 3 ребра. Следовательно, $|I| = 20\cdot 3\cdot 2 = 120$, см. таблицу.

Для каждой из групп T, O и I можно рассматривать многочлены от трёх переменных, инвариантные относительно этой группы. Верна следующая

Теорема IX. Всякий многочлен, инвариантный относительно группы $\mathrm{Sym}\,P$ симметрии правильного многогранника P, есть многочлен от трёх однородных инвариантных многочленов f_1, f_2, f_3, где $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ — многочлен степени $d_1 = 2$, f_2 — многочлен степени $d_2 > 2$, f_3 — многочлен степени $d_3 > d_2$.

Числа d_i приведены в следующей таблице.

Многогранник	Группа симметрии	d_1	d_2	d_3
тетраэдр	T $\quad |T| = 24$	2	3	4
куб, октаэдр	O $\quad |O| = 48$	2	4	6
додекаэдр, икосаэдр	I $\quad |I| = 120$	2	6	10

Между этими числами имеются соотношения, которые являются следствиями некоторых общих теорем. Например,

$$d_1 d_2 d_3 = |\mathrm{Sym}\,P|.$$

Вот объяснение (не очень строгое) этой закономерности. Многочлены f_1, f_2, f_3 принимают одинаковые значения в точках орбиты группы, и, наоборот, если в двух точках они принимают одинаковые значения, то эти точки принадлежат одной орбите, т. е. орбита задаётся системой алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = c_1, \\ f_2(x,y,z) = c_2, \\ f_3(x,y,z) = c_3, \end{cases}$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные. Число решений такой системы алгебраических уравнений, как правило, равно произведению степеней многочленов f_1, f_2, f_3. С другой стороны, оно равно числу точек орбиты, которое в общем случае равно порядку группы.

Квадратурные формулы для сферы

Пусть $f(x,y,z)$ — непрерывная функция от трёх переменных. Обозначим через

$$\oint f(x,y,z)\, d\boldsymbol{\sigma} \tag{5}$$

её интеграл по единичной сфере с центром в начале координат (здесь $d\boldsymbol{\sigma}$ — площадь «бесконечно малого кусочка» сферы). Не приводя формального определения этого интеграла, дадим его физическую интерпретацию (одну из многих возможных). Пусть наша сфера заряжена, причём плотность заряда (с учётом его знака) в точке $p = (x,y,z)$ равна $f(x,y,z)$. Тогда интеграл (5) — это общий заряд сферы.

Квадратурные формулы для единичной сферы имеют такой вид:

$$\oint f(x,y,z)\, d\boldsymbol{\sigma} \approx S(f) = \frac{4\pi}{N} \sum_{i=1}^{N} f(p_i), \tag{**}$$

т. е. мы заменяем интеграл от функции по сфере на среднее арифметическое её значений в некоторых точках сферы, умноженное на площадь сферы.

Пусть точки p_1, p_2, ..., p_N составляют орбиту группы симметрии правильного многогранника, например группы I — самой большой из этих групп. Тогда, как и в случае окружности, если эта формула точна для всех многочленов степени не выше n, инвариантных относительно данной группы, то она точна и для всех многочленов степени не выше n. Многочлены, инвариантные относительно этой группы, — это многочлены f_1, f_2, f_3, о которых говорилось в теореме IX, а также все многочлены от этих многочленов. Многочлен f_1 на сфере просто равен 1, поэтому его можно не принимать во внимание.

В подходящей системе координат вершины икосаэдра подходящего размера — это точки

$$(\pm 1, \pm\omega, 0), \quad (0, \pm 1, \pm\omega), \quad (\pm\omega, 0, \pm 1),$$

где $\omega = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, а знаки «$\pm$» берутся во всех возможных комбинациях (рис. 15). Многочлены f_2 и f_3 суть суммы соответствующих степеней

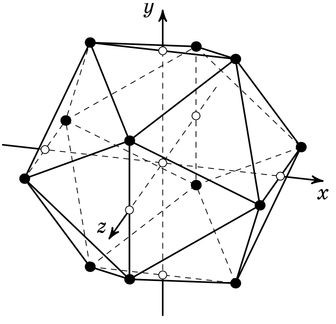


Рис. 15

скалярных произведений радиус-векторов вершин икосаэдра и точки $p = (x, y, z)$:

$$f_2(x,y,z) = (x+\omega y)^6 + (x-\omega y)^6 + (y+\omega z)^6 + \\ + (y-\omega z)^6 + (z+\omega x)^6 + (z-\omega x)^6,$$

$$f_3(x,y,z) = (x+\omega y)^{10} + (x-\omega y)^{10} + (y+\omega z)^{10} + \\ + (y-\omega z)^{10} + (z+\omega x)^{10} + (z-\omega x)^{10}$$

(вообще говоря, честное вычисление указанных сумм даёт $2f_2$ и $2f_3$, но, так как в дальнейшем нас будут интересовать лишь многочлены от f_2 и f_3, коэффициент 2 не важен и мы его опускаем).

Для вычисления интегралов по сфере от многочленов f_2 и f_3 докажем следующую общую формулу:

$$\oint (ax+by+cz)^{2k}\, d\sigma = \frac{4\pi}{2k+1}(a^2+b^2+c^2)^k. \tag{6}$$

Обозначим искомый интеграл через $I_k(a,b,c)$. Предположим, что вектор (a,b,c) каким-то поворотом пространства переводится в вектор (a',b',c'). Так как сфера переходит в себя при любом повороте, оставляющем на месте её центр, и площадь любого её кусочка при этом сохраняется, то $I_k(a,b,c) = I_k(a',b',c')$. С помощью подходящего поворота вектор (a,b,c) может быть переведён в любой вектор той же длины.

Значит, $I_k(a,b,c)$ зависит только от длины вектора (a,b,c), т. е. является функцией от $a^2+b^2+c^2$. Далее, при умножении вектора (a,b,c) на любое число λ подынтегральная функция, а вместе с ней и сам интеграл, умножаются на λ^{2k}. Следовательно, $I_k(a,b,c)=p_k(a^2+b^2+c^2)^k$, где p_k — некоторый коэффициент, не зависящий от a, b, c.

Чтобы вычислить p_k, достаточно вычислить, например, $I_k(0,0,1)$. Так как площадь шарового пояса единичного радиуса равна его высоте, умноженной на 2π,

$$I_k(0,0,1)=\oint z^{2k}\,d\boldsymbol{\sigma}=2\pi\int\limits_{-1}^{1} z^{2k}\,dz=\frac{4\pi}{2k+1}.$$

Следовательно, $p_k=\dfrac{4\pi}{2k+1}$, что и доказывает формулу (6).

В частности, по формуле (6) получаем:

$$\oint f_2(x,y,z)\,d\boldsymbol{\sigma}=\frac{3\pi}{7}(5+\sqrt{5})^3,$$

$$\oint f_3(x,y,z)\,d\boldsymbol{\sigma}=\frac{3\pi}{44}(5+\sqrt{5})^5.$$

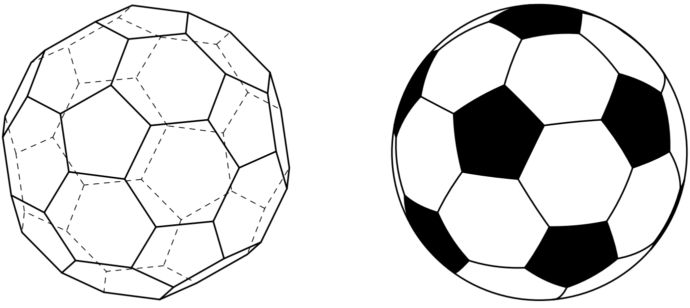
За счёт выбора точки p_1 можно сделать формулу (**) точной для многочлена f_2. Для этого нужно, чтобы

$$f_2(p_1)=\frac{1}{4\pi}\oint f_2(x,y,z)\,d\boldsymbol{\sigma}=\frac{3}{28}(5+\sqrt{5})^3=\frac{30}{7}(5+2\sqrt{5}).$$

Можно подсчитать, что этому условию удовлетворяет точка p_1 сферы, являющаяся концом радиуса, проведённого через точку $q=(\theta,\omega,0)$, где $\theta\approx 0{,}2932$. Точка q лежит на ребре икосаэдра, соединяющем вершины $(1,\omega,0)$ и $(-1,\omega,0)$, и делит его в отношении $(1-\theta):(1+\theta)\approx 1:1{,}83$.

Следующим препятствием является многочлен f_3 степени 10. К сожалению, за счёт выбора точки p_1 нельзя «убить» и этот многочлен. Таким образом, при указанном выборе точки p_1 мы получаем квадратурную формулу порядка 9. При этом, поскольку точка q лежит на ребре икосаэдра, орбита точки p_1 состоит из 60 точек, по две точки на каждом из 30 рёбер.

Проведённое построение напоминает раскройку футбольного мяча, которая получается следующим образом. Возьмём точку, делящую ребро икосаэдра в отношении 1 : 2 (довольно близкую к нашей точке q). Точки её орбиты делят каждое ребро икосаэдра на три равные части. Обрежем вершины икосаэдра плоскостями, проходящими через эти точки. Получится многогранник с 12-ю правильными пятиугольными гранями и 20-ю правильными шестиугольными гранями (рис. 16, *а*). Проекция этого многогранника на сферу и есть раскрой футбольного мяча (рис. 16, *б*). Точки орбиты, дающей квадратурную



а) *б*)

Рис. 16

формулу порядка 9, близки к точкам стыка этого раскроя. Не имеет ли смысл исправить раскрой футбольного мяча так, чтобы точки стыка попали на указанную орбиту?

Для получения квадратурных формул более высокого порядка можно вместо одной орбиты брать несколько орбит. Кроме того, точки разных орбит можно учитывать с разными весами.

Этой теме были посвящены работы многих математиков из разных стран во второй половине прошлого (двадцатого) века, причём пионерскими работами в этой области были работы российских математиков В. А. Диткина и Л. А. Люстерника (1948) и С. Л. Соболева (1962).