№ 8. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования построить её график. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

Решение:

1. Область определения функции – вся числовая прямая, то есть $D(y)=(-\infty;\ \ +\infty)$.

Точек разрыва нет.

2. Функция нечетная, так как $y(-x)=\dfrac{4(-x)}{4+(-x)^2}=-\dfrac{4x}{4+x^2}=-y(x)$. График симметричен относительно начала координат.

3. Функция не является периодической.

4. Точки пересечения с осями координат:

$Ox:\ y=\dfrac{4x}{4+x^2}=0,\Rightarrow x=0,$ точка $(0,0)$.

$Oy:\ x=0\Rightarrow y=0,$ точка $(0,0)$.

5. Экстремумы, интервалы возрастания и убывания. Вычисляем первую производную:

$$y'=\left(\frac{4x}{4+x^2}\right)'=\frac{4\left(4+x^2\right)-4x\times 2x}{\left(4+x^2\right)^2}=\frac{16+4x^2-8x^2}{\left(4+x^2\right)^2}=\frac{16-4x^2}{\left(4+x^2\right)^2}=-4\frac{x^2-4}{\left(4+x^2\right)^2}=-4\frac{(x-2)(x+2)}{\left(4+x^2\right)^2}.$$

Находим критические точки: $y'=0$ при $x=-2$ и $x=2$; y' существует при всех $x\in D(y)$.

Составим таблицу

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	1 max	$\searrow$

Функция убывает на интервалах $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$; возрастает на интервале $(-2;2)$.

Функция имеет минимум при $x=-2$, $y(-2)=-1$, функция имеет максимум при $x=2$, $y(2)=1$.

6) Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''=\left(-4\frac{x^2-4}{\left(4+x^2\right)^2}\right)'=-4\frac{2x\left(4+x^2\right)^2-\left(x^2-4\right)2\left(4+x^2\right)2x}{\left(4+x^2\right)^4}=-\frac{8x\left(4+x^2\right)\left(4+x^2-2x^2+8\right)}{\left(4+x^2\right)^4}=$$