МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
Кафедра информационных систем и технологий

Методические рекомендации по дисциплине «Математический анализ»

Для студентов-заочников специальности «Телекоммуникации»

В 2 частях

Часть II

Волгоград 2002

Составитель — старший преподаватель
кафедры информационных систем и технологий ВолГУ
Е.В. Бондарева

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. *Е.А. Михайлова* (ВолГУ);
канд. пед. наук, доц. *М.В. Ларина* (ВГСХА)

Рекомендовано к печати
редакционно-издательским советом ВолГУ

Методические рекомендации по дисциплине «Мате атический анализ»: Для студентов-заочников специальности «Телекоммуникации»: В 2 ч. / Сост. Е.В. Бондарева. — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2002. — Ч. II. — 44 с.

В работе представлены методические рекомендации по изуче ию курса, а также даны некоторые типовые примеры с ко ентария и по их решению.

Содержит вопросы программы курса, варианты контроль ых заданий по математическому анализу для студентов 1-го курса заоч ого отделения специальности «Телекоммуникации».

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Названия тем	Работа с преподавателем, ч			Самостоятельная работа, ч
	Лекции	Семинарские занятия	Всего	
I. Введение в математический анализ	4	4	8	30
II. Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной	8	8	16	55
III. Интегральное исчисление	6	6	12	60
IV. Функции многих независимых переменных	4	4	8	50
V. Кратные и криволинейные интегралы	4	4	8	45
VI. Числовые и функциональные ряды	4	4	8	40
Всего	30	30	60	280

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

III. Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредстве ое интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.

2. Интегрирование рациональных функций путе разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование екоторых иррациональных выражений. Использование таблиц и тегралов.

Определенный интеграл

1. Задачи, приводящие к понятию определенных и тегралов. Определенный интеграл как предел интеграль ых су . Основные свойства определенного интеграла.

2. Производная интеграла по верхнему пределу. Фор ула Ньютона — Лейбница.

3. Вычисле ие определе ого и теграла: и тегрирова ие по частя и подста овкой. Приближе ое вычисле ие определенного интеграла: фор улы пря оугольников, трапеций, формула Симпсона.

4. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения. Физические приложения определе ого и -теграла.

5. Несобственные интегралы с бесконечны и предела и. Несобственные интегралы от неограниченных функций, ос овные свойства. Абсолютная и условная сходимости. Приз аки сходимости.

IV. Функции многих независимых переменных

1. Функции нескольких переменных. Область определе ия. Предел функции. Непрерывность.

2. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Инвариантность фор ы пол ого дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверх ости. Геометрический смысл полного дифференциала.

3. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков.

4. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия.

5. Условный экстремум, метод множителей Лагра жа

V. Кратные и криволинейные интегралы

1. Задачи, приводящие к понятиям кратных, криволи ейных и поверхностных интегралов.

2. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Вычисле ие кратных интегралов повторным интегрирование .

3. Площадь поверхности. Определение поверхност ых и -тегралов, их свойства, примеры вычисления.

4. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода, их свойства, примеры вычисления.

VI. Числовые и функциональные ряды

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходи ое условие сходимости. Действия с рядами.

2. Методы исследова ия сходи ости рядов.

3. Фу кцио аль ые ряды. Область сходи ости, етоды ее определения.

4. Степенные ряды. Разложение функций в степен ые ряды. Применение степенных рядов в приближенных вычисле иях.

5. Ряды Фурье по тригонометрическим систе а . Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Условия поточечной сходимости и сходимости «в среднем». При е е ие тригонометрических рядов Фурье в приближенных вычисле иях.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В соответствии с учебным планом студенты-заоч ики специальности «Телекоммуникации» выполняют по курсу атематического анализа четыре контрольные работы.

На обложке тетради следует указать фамилию и и ициалы студента и дату отправки работы.

Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Все вычисления необходи о записывать полностью. Для замечаний преподавателя нужно на каждой странице оставлять поля. Студент выполняет вариант, указа ый преподавателем; номера задач для каждого из заданий соответствуют номеру варианта.

Перед выполнением каждой контрольной работы студе т должен изучить соответствующие разделы рекомендуе ой литературы; он также может воспользоваться решения и типовых примеров, содержащихся в настоящих методических указа иях.

Список рекомендуемой литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интеграль ое исчисления. М.: Наука, 1973. Т. I, II.

2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упраж ениях и задачах. М.: Высшая школа, 1974. Ч. I, II.

3. Щипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1985.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Тема V. Неопределенный интеграл

Рекомендуемая литература: [**1**], гл. X, § 1—10, 12, 13; [**2**], ч. I, гл. 8, § 1, 2.

Для того, чтобы проинтегрировать функцию, необходи о изучить таблицу основных интегралов, простейшие свойства неопределенного интеграла, а также основные етоды и тегрирования: непосредственное интегрирование, етод за е ы переменной и интегрирование по частям.

При непосредственном интегрировании следует учитывать, что иногда нужно предварительно произвести простейшие тождественные преобразования подынтеграль ой функции.

Метод подстановки (замены переменной) заключается в том, что во многих случаях введение новой пере е ой интегрирования дает возможность свести данный и теграл к табличному.

В случае использования метода интегрирования по частям весьма важно правильно выбрать множители *u* и *dv*. Общих правил разложения подынтегрального выражения а указанные множители нет. Однако существуют некоторые частные указания, которыми можно руководствоваться при это методе интегрирования. Например, если подынтеграль ая функция представляет собой произведение показатель ой или тригонометрической функции на многочлен, то за ожитель *u* следует принять многочлен. Если же подынтеграль ое выражение есть произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции и многочлена, то за ожитель *u* следует принять логарифмическую или обрат ую тригонометрическую функцию.

При интегрировании выражений, содержащих в з а е ателе квадратный трехчлен, следует предварительно преобразовать квадратный трехчлен (выделить из него полный квадрат), а затем использовать табличные интегралы.

Интегрирование рациональных дробей включает в себя:

1) умение разложить рациональные дроби на простейшие:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

где m — целое положительное число, не меньшее, че 2, а квадратный трехчлен (формула) $ax^2 + bx + c$ не и еет действительных корней;

2) умение интегрировать указанные выше дроби.

Тема VI. Определенный интеграл

Рекомендуемая литература: [**1**], гл. XI, § 1—6; гл. XII,   1—5, 7, 8; [**2**], ч. I, гл. 9, § 1, 3, 5, 8.

При решении задач контрольной работы следует и еть в виду, что площадь S фигуры, ограниченной сверху и с изу непрерывными линиями $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, пересекающи и-ся в точках с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по фор уле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx.$$

При вычислении площади фигуры, ограниченной кривой, уравнение которой задано в полярных координатах, реко е -дуется изобразить кривую в системе координат.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется интегральной суммой данной фу кции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$?
2. Дайте определение определенного интеграла.
3. Каков геометрический смысл определенного и теграла от заданной функции?
4. Перечислите основные свойства определенного и теграла.
5. Напишите формулу Ньютона — Лейбница.
6. В чем состоит способ подстановки для вычисле ия определенного интеграла?
7. Как выглядит формула интегрирования по частя   для определенного интеграла?
8. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?
9. Запишите формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых и в полярных координатах.

10. Приведите фор улу для вычисле ия объе а тела с известы и площадя и его попереч ых сече ий.
11. Напишите фор улу для вычисления объе а тела вращения.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задание 1. В задачах 1.1—1.20 найти неопределен ые интегралы способом подстановки (методом замены пере е - ной).

1.1. $\int \sqrt{1+4x^2}\, x dx$

1.2. $\int \frac{\ln x - 1}{x} dx$

1.3. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx$

1.4. $\int e^{2x^2-4} x dx$

1.5. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^3}}$

1.6. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{3+\sin^2 x}}$

1.7. $\int \frac{x^3\, dx}{1+x^8}$

1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

1.9. $\int \cos^3 x \sin x dx$

1.10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

1.11. $\int \frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2} dx$

1.12. $\int \sqrt{x^4 - 3x^3} \cdot dx$

1.13. $\int \frac{x dx}{4x^2 - 3}$

1.14. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1.15. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}} - 1}$

1.16. $\int \frac{1+\mathrm{tg} 3x}{\cos^2 3x}$

1.17. $\int \frac{\sin x\ dx}{2+\cos x}$

1.18. $\int \mathrm{tg} 5x dx$

1.19. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)}$

1.20. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{4+e^{2x}}$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$.

Решение. При е и подста овку $t = \ln x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{x}$.

Имеем $\int (\ln x)^3 \dfrac{dx}{x} = \int t^3 dt = \dfrac{1}{4} t^4 + c = \dfrac{1}{4} (\ln x)^4 + c$.

Пример 2. Найти интеграл $\int e^{x^2+1} x\,dx$.

Решение. Применим подстановку $t = x + 1$, тогда

$$dt = 2xdx: \ \frac{dt}{2} = xdx.$$

Получаем

$$\int e^{x^2+1} x\,dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + c.$$

Задание 2. В задачах 2.1—2.20 найти неопределен ые интегралы, применяя метод интегрирования по частя .

2.1. $\int \ln x dx$	**2.11.** $\int (x+1) e^x dx$
2.2. $\int x^3 \ln x dx$	**2.12.** $\int (2x+8) e^{-5x} dx$
2.3. $\int x \ \cos 2x dx$	**2.13.** $\int (2x-1) \cos 5x dx$
2.4. $\int x \sin 3x dx$	**2.14.** $\int \arcsin 2x dx$
2.5. $\int x e^{-x^2} dx$	**2.15.** $\int \ln 5x dx$
2.6. $\int \mathrm{arctgx} dx$	**2.16.** $\int (7x+1) \sin 4x dx$
2.7. $\int x 3^x dx$	**2.17.** $\int \mathrm{arctg} 3x dx$
2.8. $\int \arccos x dx$	**2.18.** $\int x^2 e^x dx$
2.9. $\int (2x-1) \ln x dx$	**2.19.** $\int x^2 \cos 2x\, dx$
2.10. $\int (3x+1) \sin 3x\, dx$	**2.20.** $\int x \ 2^x dx$

Решение типового примера

Найти интеграл $\int x^2 \ln x\, dx$.

Решение. Используем формулу интегрирования по частя

$$\int u\, dv = u v - \int v\, du.$$

Полагаем, $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}$.

Получае

$$\int x^2 \ln x\,dx = \ln x\,\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + c.$$

Задание 3. В задачах 3.1—3.20 найти неопределе ые и - тегралы, используя выделение полного квадрата.

3.1. $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$ **3.11.** $\int \frac{4x-3}{x^2+10x+29}dx$

3.2. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$ **3.12.** $\int \frac{10x+1}{x^2-8x+20}dx$

3.3. $\int \frac{3x-2}{x^2+3x+1}dx$ **3.13.** $\int \frac{3x+7}{x^2-16x+68}dx$

3.4. $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$ **3.14.** $\int \frac{5x+14}{x^2+2x+17}dx$

3.5. $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$ **3.15.** $\int \frac{2x-15}{x^2-8x+20}dx$

3.6. $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$ **3.16.** $\int \frac{17x+3}{x^2-12x+40}dx$

3.7. $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+8}dx$ **3.17.** $\int \frac{11x-4}{x^2+16x+65}dx$

3.8. $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$ **3.18.** $\int \frac{8x-5}{x^2-2x+17}dx$

3.9. $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx$ **3.19.** $\int \frac{15x-4}{x^2+8x+32}dx$

3.10. $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx$ **3.20.** $\int \frac{2x-5}{x^2+8x+25}dx$

Решение типового примера

Пример. Найти интеграл $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+8}dx$.

Решение. Преобразуе з а е атель поды теграль ой дроби, выделив пол ый квадрат:

$$x^2 - 4x + 8 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 8 = (x-2)^2 + 2.$$

Введем подстановку $t = x - 2$, $dt = dx$.

Получим

$$\int \frac{5x+1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{5x+1}{(x-2)^2+2^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{5(t+2)+1}{t^2+2^2}\,dt = \int \frac{5t+11}{t^2+2^2}\,dt = \int \frac{5tdt}{t^2+2^2} + \int \frac{11dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{11}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{3}{2}\ln\left[(x-2)^2+4\right] + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + c.$$

Примечание. Чтобы найти интеграл $\int \frac{5t\,dt}{t^2+4}$, использовалась замена переменной $z = t^2 + 4$. Тогда $dz = 2t\,dt$.

Получим

$$\int \frac{5t\,dt}{t^2+4} = \frac{5}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+4} = \frac{5}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{5}{2}\ln z + c = \frac{5}{2}\ln\left(t^2+4\right) + c.$$

Задание 4. В задачах 4.1—4.20 найти неопределе ые и -тегралы, пользуясь разложением рациональных дробей а простейшие.

4.1. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

4.2. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

4.3. $\int \frac{7x-5}{(x^3+x^2-6x)}dx$

4.4. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$

4.5. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

4.6. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x+2)}$

4.7. $\int \frac{x+20}{x^3-8}dx$

4.8. $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$

4.9. $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}\,dx$

4.10. $\int \frac{3x-1}{x^2+3x}dx$

4.11. $\int \frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$

4.12. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$

4.13. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}\,dx$

4.14. $\int \frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$

4.15. $\int \frac{5x+1}{(x+3)(x-4)}dx$

4.16. $\int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)}\,dx$

4.17. $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}\,dx$

4.18. $\int \frac{18x-6}{x^3+x^2-6x}\,dx$

4.19. $\int \frac{x-2}{(x+2)\left(x^2+5\right)}dx$

4.20. $\int \frac{x\,dx}{(x-3)\left(x^2+10\right)}$

Решение типового примера

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}$.

Решение. Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1},$$

отсюда получаем

$x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx \quad C.$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степе ях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B \\ x^1 & 1 = -B + C\,, \\ x^0 & 0 = A - C \end{array}$$

отсюда получаем $A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\int \frac{xdx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\int\left[\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+c.$$

Задание 5. В задачах 5.1—5.10 вычислить площадь фигуры, огра иче ую указа ы и ли ия и:

5.1. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 + 2$

5.2. $y = x^3$, $y = 4x$

5.3. $y = x^2$, $y = 3 - 2x$

5.4. $y = -x$, $y = 2x - x^2$

5.1. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 + 2$

5.2. $y = x^3$, $y = 4x$

5.3. $y = x^2$, $y = 3 - 2x$

5.4. $y = -x$, $y = 2x - x^2$

5.5. $y = -x$, $y = 2x - x^2$

5.6. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$

5.7. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5$, $y = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1$

5.8. $y = 3x^2 - 5x - 1$, $y = -x^2 + 2x + 1$

5.9. $y = 2x^2 + 6x - 3$, $y = x^2 + x + 5$

5.10. $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$, $y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 6$

В задачах 5.11.—5.20. найти объем тела, образова ого вращением вокруг оси Ox фигуры, расположенной в перво квадрате и ограниченной параболой, прямой и осью O .

5.11. $y = 2x^2$, $y = -3x + 14$

5.12. $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -x + 6$

5.13. $y = 3x^2$, $y = -2x + 5$

5.14. $y = 3x^2$, $y = -3x + 6$

5.15. $y = x^2$, $y = -2x + 5$

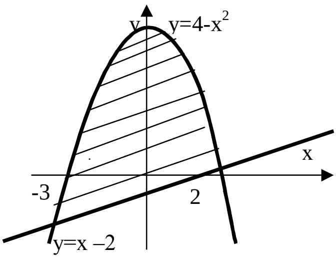
5.16. $y = 4x^2$, $y = -2x + 2$

5.19. $y=\dfrac{1}{4}x^2, \quad y=-2x+6$ **5.21.** $y=\dfrac{x^2}{2}, \quad y=-3x+8$

5.20. $y=2x^2, \quad y=-x+10$ **5.22.** $y=x^2, \quad y=-x+3$

Решение типового примера

Найти площадь фигуры, ограниченной пря ой $y =$ 2 и параболой $y = 4 - x^2$:



Решение. Находим точки пересечения двух данных ли ий.

Для этого приравняем правые части их уравнений: 2 = $= 4 - x^2$, откуда $x^2 + x - 6 = 0$.

Решив уравнение, получаем $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Поэто у пределы интегрирования будут $a = -3$, $b = 2$.

Таким образом, $S=\int\limits_{-3}^{2}\left[\,4-x^2-(x-2)\,\right]dx=\int\limits_{-3}^{2}\left(6-x-x^2\right)dx=$

$$=6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-3}^{2}=12-2-\frac{8}{3}-\left(-18-\frac{9}{2}+9\right)=7\frac{1}{3}+13\frac{1}{2}=20\frac{5}{6}.$$

Задание 6. В задачах 6.1—6.10 найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных коорди атах.

6.1. $r=2\cos\varphi, \qquad \varphi=0, \quad \varphi=\dfrac{\pi}{4}$

6.2. $r=8(1+\cos\varphi), \qquad \varphi=0, \quad \varphi=\dfrac{\pi}{2}$

6.3. $r=2\cos\varphi, \qquad r=4\cos\varphi$

6.4. $r=\sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad \varphi=0, \quad \varphi=\dfrac{\pi}{6}$

6.5. $r = 2 + \cos\varphi,\qquad \varphi = 0,\quad \varphi = \dfrac{\pi}{6}$

6.6. $r = 2\sin\varphi,\qquad \varphi = 0,\quad \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

6.7. $r = 10\cos\varphi\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right),\qquad \varphi = \dfrac{\pi}{4},\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

6.8. $r = 1 - 2\cos\varphi,\qquad \varphi = 0,\quad \varphi = \dfrac{\pi}{6}$

6.9. $r = 2\varphi,\qquad \varphi = 0,\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

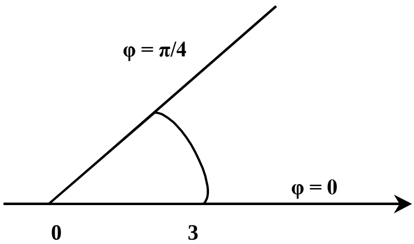
6.10. $r = e^{\varphi},\qquad \varphi = 0,\quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

Решение типового примера

Найти площадь фигуры, ограниченной кривы и, зада - ными в полярных координатах:

$$r = 3(1 + \sin\varphi),$$

$$\varphi = 0,\quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$



Решение. Заданная фигура ограничена дву я луча и $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и кривой $r = 3(1 + \sin\varphi)$.

Ее площадь равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2\sin\varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$=\frac{9}{2}\left[\varphi+2(-\cos\varphi)+\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{9}{2}\left[\frac{3}{8}\pi-\sqrt{2}+1\right].$$

В задачах 6.11—6.20 найти длину дуги кривой.

6.11. $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x},\quad 0\le x\le 12$

6.12. $y=\ln\sin x,\quad \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$

6.13. $y=1-\ln\cos x,\quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$

6.14. $r=a\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

6.15. $r=a\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

6.16. $r=1-\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

6.17. $r=2(1+\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

6.18. $y=\ln x,\quad \frac{3}{4}\le x\le 1$

6.19. $y=\ln\cos x,\quad 0\le x\le\frac{\pi}{3}$

6.20. $y=\frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1},\quad 0\le x\le 1$

Решение типового примера

Найти длину дуги кривой $y=1+\ln\sin x$, $\left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Длина дуги кривой, заданной в декартовых координатах, вычисляется по формуле $L=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

У нас

$$L=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}}{\sin x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Применим подстановку $z = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.Тогда $dz = \dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ и

$$L = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 3

Тема VI. Функции многих независимых переменных

Рекомендуемая литература: [**1**], гл. XIII, § 1—7, 12—15, 17; [**2**], ч. I.

При решении задач по этой теме следует обратить в и ание на то, что правила вычисления частных производ ых те же, что и для функций одной переменной.

Если необходимо найти частную производную по пере е ной x, то переменная y при этом считается постоянной величиной, и наоборот — при нахождении частной производ ой по переменной y на переменную x следует смотреть как на ко ста ту.

В задачах на исследование функции $Z = f(x; y)$ на экстре у следует придерживаться следующей последовательности действий:

1. Сначала нужно найти стационарные точки, т. е. точки, в которых частные производные равны нулю. Для этого надо айти частные производные функции $Z = f(x; y)$ и решить систе у уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ \dfrac{dz}{dy} = 0 \end{cases}.$$

Таких точек может быть несколько. Обозначи од у из их

$P_0(x_0\,;\ y_0)$.

2. Найти частные производные второго порядка фу кции $Z = f\,(x;\ \text{y})$ и вычислить их значения в точке $P_0(x_0\,;\ y_0)$.

Обозначим

$$A = \left[\frac{d^2 z}{dx^2}\right] P_0\,; \quad B = \left[\frac{d^2 z}{dxdy}\right] P_0\,; \quad C = \left[\frac{d^2 z}{dy^2}\right] P_0\,.$$

3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Если окажется, что $\Delta > 0$, то функция $Z = f\,(x;\ y)$ в точке $P_0(x_0\,;\ y_0)$ имеет максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$; если же $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_0\,;\ y_0)$ экстремума нет. Нако ец, если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме в этой точке остается открытым и требует дополнительного исследования.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется функция нескольких пере е ых?
2. Дайте определение непрерывности функции нескольких переменных.
3. Что называется частной производной функции ескольких переменных?
4. Какова геометрическая интерпретация частной производной функции двух аргументов?
5. Что называется полным дифференциало функции двух аргументов?
6. Как вычисляется производная сложной функции?
7. Как вычисляется производная по направлению и какова ее связь с градиентом функции?
8. Сформулируйте правило исследования функции двух переменных на экстремум.

Тема VII. Кратные и криволинейные интегралы

Рекомендуемая литература: [**1**], гл. XIV, 1—5, 10; гл. XV, § 1, 2, 4; [**2**], ч. 2, гл. 1, § 1—4, 6; гл. 2, § 1, 2.

Для решения задач по этой теме необходи о прежде всего разобраться в правилах перехода от двойного и теграла по правильной области D к двукратно у (повтор ому) интегралу: если D — правильная область, огра иче ная в направлении оси Oy линиями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $[a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le \varphi_2(x)]$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

Обратите внимание на переход в двойно интеграле к полярным координатам.

Изучите механические приложения двойного и теграла.

При изучении криволинейного интеграла разберитесь в способе его сведения к определенному интегралу по екоторому отрезку.

Изучите условия независимости криволинейного и теграла от пути интегрирования.

Вопросы для самопроверки

1. Какая область называется правильной?
2. Как свести двойной интеграл по правильной области к двукратному?
3. Каковы правила перехода в двойном интеграле к полярным координатам?
4. Как вычисляется объем тела с помощью двой ого и теграла?
5. Как вычисляется масса и центр тяжести плоской пластины при заданной поверхностной плотности?
6. Какие задачи приводят к понятию криволиней ого и теграла?
7. Как вычисляется криволинейный интеграл?
8. Как влияет на значение криволинейного интеграла аправление обхода контура интегрирования?
9. Каковы условия независимости криволинейного и теграла от пути интегрирования?

10. Какова связь езависи ости криволи ей ого и теграла от пути и тегрирова ия и раве ства улю криволи ейного интеграла по любо у за кнуто у контуру?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Задание 1. В задачах 1.1—1.5 дана функция $Z = f(x; y)$. Найти:

1. Частные производные второго порядка $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ и $\dfrac{d^2z}{dy^2}$.

2. Смешанные частные производные $\dfrac{d^2z}{dx\,dy}$ и $\dfrac{d^2z}{dy\,dx}$.

1.1. $z = \dfrac{\operatorname{tg} x}{y}$

1.2. $z = \arccos\dfrac{y}{x}$

1.3. $z = x^{y^2}$

1.4. $z = \ln\sqrt{x^2 + 4y}$

1.5. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

1.6. Дана функция $z = \arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$.

Показать, что $x\dfrac{dz}{dx} + y\dfrac{dz}{dy} = 0$

1.7. Дана функция $z = e^{x/y}$.

Показать, что $x\dfrac{dz}{dx} + y\dfrac{dz}{dy} = 0$

1.8. Дана функция $z = \dfrac{xy}{x+y}$.

Показать, что $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=z$

1.9. Дана функция $z=x\ln\frac{y}{x}$.

Показать, что $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=z$

1.10. Дана функция $z=\frac{y^2}{\sqrt{xy}}$.

Показать, что $x^2\frac{d^2z}{dx^2}-y^2\frac{d^2z}{dy^2}=0$

В задачах 1.11—1.20 вычислить частные производ ые первого и второго порядков от заданных функций.

1.11. $z=3\sin(x^3-y^2)-5x^3y-7$

1.12. $z=8\ln(xy)+10xy^2-8x$

1.13. $z=2e^{3x+y^2}-2x^2y^2+9y$

1.14. $z=8\cos(xy)-3x-12x^4y$

1.15. $z=3\sqrt{x^2+y^2}-5xy^3+8y$

1.16. $z=x\sin(xy)+8x^2y^2-7x$

1.17. $z=0{,}5\ln(x^3+y^2)-9x^3y+2x$

1.18. $z=\sqrt{x+2y}+3x^4y-8x-2$

1.19. $z=8e^{x+y^3}-3xy^3+7x-3$

1.20. $z=8\ln(x^2+y^2)-6x^2y^3+8x-1$

Решение типового примера

Найти частные производные первого и второго порядков функции $z=x^3y^2+x\sin y$.

Решение. Находи част ую производ ую $\frac{dz}{dx}$. При это рассматриваем переменную y как постоянную величину.

Получаем $\frac{dz}{dx}=3x^2y^2+\sin y$.

Аналогично находим $\frac{dz}{dy}$, считая переменную x постоя - ной величиной:

$$\frac{dz}{dy}=2x^3y\ \ +x\cos y.$$

Далее, дифференцируя $\frac{dz}{dx}$ по x, получаем $\frac{d^2z}{dx^2}=6xy^2$; дифференцируя $\frac{dz}{dx}$ по x, получаем $\frac{d^2z}{dx\,dy}=6x^2y\ \ +\cos y$; дифференцируя $\frac{dz}{dy}$ по y, получаем $\frac{d^2z}{dy^2}=2x^3-x\sin y$.

Задание 2. В задачах 2.1—2.10 функцию $z=f(x;\,y)$ исследовать на экстремум.

2.1. $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$

2.2. $z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+1$

2.3. $z=3xy-x^2-4y^2+4x+6y-1$

2.4. $z=3x^2+3y^2+5xy+4x-7y+5$

2.5. $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y-4$

2.6 . $z=x^2+y^2+3xy-x-4y+1$

2.7. $z=x^2+y^2-xy+x+y+2$

2.8. $z=3x^2+3y^2+5xy+x-y+5$

2.9. $z=x^2+2xy\ -\ y^2+6x-10y+1$

2.10. $z=4-5x^2-y^2-4xy-4x-2y$

Решение типового примера

Исследовать а экстре у фу кцию $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

Решение. Находим стационарные точки заданной фу кции:

$$\frac{dz}{dx} = 6 - 2x - y; \ \frac{dz}{dy} = -x - 2y.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ -x - 2y = 0, \end{cases}$$

находим $x_0 = 4, \quad y_0 = -2$.

Следовательно, данная функция имеет только од у стационарную точку $P_0(4; -2)$. Находим частные производные второго порядка и их значения в найденной стационарной точке:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -2; \ \frac{d^2z}{dxdy} = -1; \ \frac{d^2z}{dy^2} = -2.$$

Частные производные второго порядка не содержат , о и постоянны в любой точке и, в частности, в точке $P_0(4; -2)$. Имеем $A = -2$, $B = -1$, $C = -2$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке $P_0(4; -2)$ данная фу кция имеет максимум $z_{\text{макс}} = z(4; -2) = -4 + 24 - 16 + 8 - 4 = 8$.

В задачах 2.11—2.20 найти наименьшее и наибольшее з ачения функции $Z = f(x; y)$ в заданной замкнутой области.

2.11. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

2.12. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в треугольнике, огра иче о осями координат Ox и Oy и прямой $y = 4 - x$.

2.13. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 1$ в квадрате $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

2.14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

2.15. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в треуголь ике, огра и-че о ося и коорди ат O и Oy и пря ой $x + y = 3$.

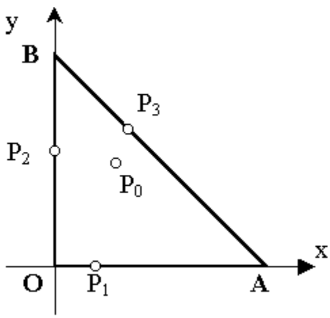
2.16. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в области, ограниче ой параболой $y = x^2$, прямой $y = 4$ и осью ($x \geq 0$).

2.17. $z = x^2 + xy - 3x - y$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$.

2.18. $z = x^2 - 2xy + 3$ в области, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и осью Ox.

2.19. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y = 0$, $x = 2$, $y = x + 2$.

2.20. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 4$, $-3 \leq y \leq 2$.



Решение типового примера

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в замкнутом треугольнике AOB, ограниченном осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$.

Решение. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданной замкнутой области, необходимо: 1) найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения фу к-ции в этих точках; исследовать на экстремум эти точки е следует; 2) найти наибольшее и наименьшее значения фу кции на границе области; если граница состоит из нескольких линий, то исследования проводятся для каждого участка в отдельности; 3) сравнить полученные значения функции и установить наибольшее и наименьшее значения функции в зада -ной замкнутой области.

Находим стационарные точки, лежащие внутри зада ой области:

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 2; \quad \frac{dz}{dy} = 4y - 8.$$

Прирав яв к улю част ые производ ые и решив получе ую систе у

$$\begin{cases} 2x-2=0, \\ 4y-8=0, \end{cases}$$

находим стационарную точку $P_0(1;\, 2)$.

Эта точка принадлежит заданной области. Вычисли з ачение функции в этой точке:

$$z(P_0) = z(1;2) = 1 + 8 - 2 - 16 + 5 = -4.$$

Граница области состоит из отрезка OA оси O , отрезка OB оси Oy и отрезка AB.

Определим наибольшее и наименьшее значения фу кции z на каждом из этих трех участков.

На отрезке OA $y = 0$, а $0 \le x \le 4$. Если $y = 0$, то

$$z(x) = x^2 - x + 5.$$

Находим наибольшее и наименьшее значения этой фу кции на отрезке $[0;\, 4]$:

$$\frac{dz}{dx} = 2x-2;\ 2x-2=0;\ x = 1; \qquad P_1(1;0\,);\ z(P_1) = z(1;0) = 4.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка OA, т. е. в точках $O(0;\, 0)$ и $A(4;\, 0)$: $z(0) = 5$; $z(4) = 13$.

На отрезке OB $x = 0$ и $0 \le y \le 4$. Если $x = 0$, то

$$z(y) = 2y^2 - 8y + 5.$$

Находим наибольшее и наименьшее значения фу кции z от переменной y на отрезке $[0;\, 4]$:

$$\frac{dz}{dy} = 4y-8;\ 4y - 8;\ y=2;\ P_2(0;2);\ P_2(0;2).$$

В точке $O(0;\, 0)$ значение функции уже было найде о. Вычислим значение функции в точке B: $z(B) = z(0;4) = 5$.

Теперь исследуем отрезок AB. Уравнение пря ой AB и еет вид $y = 4 - x$. Подставив это выражение для y в зада ую функцию z, получим

$$z = x^2 + 2(4 - x)^2 - 2x - 8(4 - x) + 5 = 3x^2 - 10x + 5.$$

Определи аибольшее и аи е ьшее з аче ия этой фу -кции а отрезке [0; 4]:

$$\frac{dz}{dx}=6x-10;\ 6x-10=0;\ x=\frac{5}{3};\qquad P_3=\left(\frac{5}{3};\quad \frac{7}{3}\right),$$

где P_3 — стационарная точка на отрезке AB.

Вычислим значение функции в этой точке:

$$z\left(P_3\right)=z\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)=-\frac{10}{3}.$$

Значения функции на концах отрезка AB найде ы ра ее.

Сравнивая полученные значения функции z в стацио арной точке P_0 заданной области, в стационарных точках а границах области P_1, P_2, P_3 и в точках O, A и B, заключае , что наибольшее значение в заданной замкнутой области фу кции z имеет в точке A, наименьшее значение — в точке $P_0(1;\,2)$.

Итак,

$$z_{\text{наиб}}=z(4;\ 0)=13;\ z_{\text{наим}}=z(1;\,2)=-4.$$

Задание 3. В задачах 3.1—3.20 требуется:

1. Построить на плоскости xOy область интегрирова ия заданного интеграла.

2. Изменить порядок интегрирования и вычислить площадь области при заданном и измененном порядках интегрирова ия.

3.1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2\sqrt{2x}} dy$

3.2. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{8-3x}^{8-x^2} dy$

3.3. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-3}^{3x-3} dy$

3.4. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{2x^2/3}^{2\sqrt{3x}} dy$

3.5. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2/8}^{3\sqrt{x}} dy$

3.6. $\int\limits_1^7 dx \int\limits_{(x-1)^2/6}^{x-1} dy$

3.7. $\int\limits_0^9 dx \int\limits_{x^2/9+1}^{x+1} dy$

3.8. $\int\limits_1^5 dx \int\limits_{(x-1)^2/4}^{2\sqrt{x-1}} dy$

3.9. $\int\limits_1^5 dx \int\limits_{(x-1)^2/8}^{(x-1)/2} dy$

3.10. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{2x^3/9}^{2\sqrt{3x}} dy$

3.11. $\int\limits_0^6 dx \int\limits_{x^2/3-4}^{2x-4} dy$

3.12. $\int\limits_0^5 dx \int\limits_{x^2/5}^{\sqrt{5x}} dy$

3.13. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x^3/8}^{4\sqrt{x}} dy$

3.14. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x^2/2}^{4\sqrt{x}} dy$

3.15. $\int\limits_{0}^{6} dx \int\limits_{x^2/4}^{3/2} dy$

3.16. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x^2/2-3}^{2x-3} dy$

3.17. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x^3/8}^{2x} dy$

3.18. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{4x^2/9}^{4\sqrt{x/3}} dy$

3.19. $\int\limits_{0}^{8} dx \int\limits_{x\;\;/2-1}^{\sqrt{2x-1}} dy$

3.20. $\int\limits_{0}^{5} dx \int\limits_{2x^2/5-4}^{2x-4} dy$

Задание 4. В задачах 4.1—4.20 вычислить объе тела, ограниченного заданными поверхностями и расположенного в первом октанте.

4.1. $x^2+y^2+z=10; \quad x^2+y^2=1; \quad y=x; \quad y=0; \quad z=0.$

4.2. $x^2+y^2+z^2=16; \quad x^2+y^2=4.$

4.3. $x^2+y^2=2; \quad x+y+z=2; \quad z=0.$

4.4. $x^2+y^2+z=12; \quad x^2+y^2=4; \quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}; \quad y=0; \quad z=0.$

4.5. $x^2+y^2+z^2=10; \quad x^2+y^2-4=0.$

4.6. $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}; \quad x+y+z=1; \quad z=0.$

4.7. $z=8-x^2-y^2; \quad z=0; \quad y=\sqrt{3x}; \quad y=x.$

4.8. $x^2+y^2+z^2=36; \quad z=0; \quad y=x; \quad y=0.$

4.9. $x^2+y^2=4; \quad z=1+x^2+y^2.$

4.10. $x^2+y^2=\dfrac{9}{2}; \quad x+y+z=3; \quad z=0.$

4.11. $x^2+y^2=3; \quad z=4-x^2-y^2.$

4.12. $x^2+y^2=5; \quad z=x^2+y^2.$

4.13. $x^2+y^2=2; \quad y^2+z^2=2.$

4.14. $x^2+y^2=18; \quad x+y+z=6; \quad z=0.$

4.15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4; \quad x^2 + y^2 = 2.$

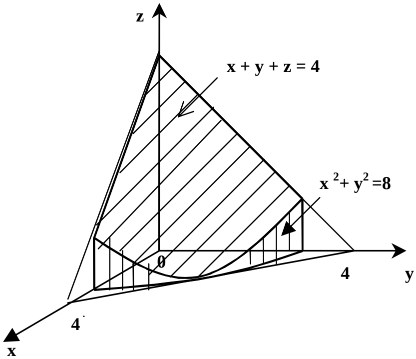
4.16. $z = 8 - x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 3; \quad y = \sqrt{3}; \quad y = 0.$

4.17. $x^2 + y^2 = \frac{1}{8}; \quad x + y + z = \frac{1}{2}; \quad y = x; \quad y = 0; \quad z = 0.$

4.18. $z = 1 - x^2 - y^2; \quad y = \sqrt{3}\,x; \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}; \quad z = 0.$

4.19. $x^2 + y^2 + z^2 = 4; \quad x^2 + y^2 = 3.$

4.20. $x^2 + y^2 = 18; \quad y = x; \quad y = 0; \quad x + y + z = 6; \quad z = 0.$



Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниче ого поверхностями $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$ и расположенного в перво октанте.

Решение. Зада ое тело ограничено круговы цили -дром $x^2 + y^2 = 8$, коорди ат ы-ми плоскостями и плоскостью $x + y + z = 4$.

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу — плоскостью $z = 0$ и по бока — прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей а плоскости xOy область D, вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

В данном случае область D — это часть круга радиусо $\sqrt{8}$, расположенная в первом квадранте, поэтому расс атривае ый интеграл удобно вычислять в полярных координатах. При это

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dx\,dy = rd\ rd\varphi.$$

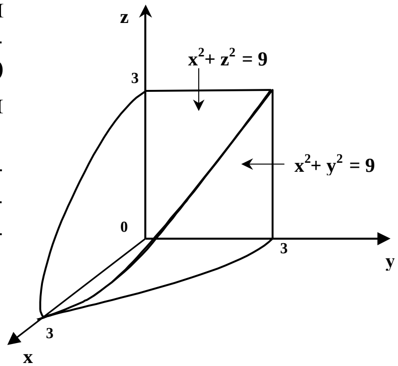
Таким образом,

$$V = \iint_D (4 - x - y)\,dx\,dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} (4 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \cos\varphi - \frac{r^3}{3} \sin\varphi \right) \Bigg|_0^{\sqrt{8}} \right] d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[16 - \frac{16\sqrt{2}}{3} (\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi =$$

$$= \left(16\varphi - \frac{16\sqrt{2}}{3} \sin\varphi + \frac{16\sqrt{2}}{3} \cos\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + z^2 = 9$ и расположенного в первом октанте.



Решение. Заданное тело ограничено двумя круговыми цилиндрами. Искомый объем выражается интегралом

$$V = \iint_D \sqrt{9 - x^2}\, dx\, dy,$$

где D — четверть круга радиуса, равного 3. Таким образом,

$$V = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9 - x^2} dy = \int_0^3 \left[\sqrt{9 - x^2} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \right] dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \left(y \Bigg|_0^{\sqrt{9-x^2}} \right) dx = \int_0^3 (9 - x^2) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 = 27 - \frac{27}{3} = 18.$$

Задание 5. В задачах 5.1—5.10 установить независи ость от пути интегрирования и вычислить криволинейный и теграл по контуру, связывающему точки M (1; 2) и N (3; 5).

5.1. $\int (x^3 - 2y) dx - (2x - 5) dy$

5.2. $\int (1 + 2xy) dx + (x^2 + y) dy$

5.3. $\int (x^2 - y) dx - (x - 3y) dy$

5.4. $\int (3+xy)dx+\left(\frac{1}{2}x^2+2y\right)dy$

5.5. $\int (5x-2y)dx-(2x\ \ -y)dy$

5.6. $\int (3x^2-y)dx-(x+3y)dy$

5.7. $\int (4xy\ +3)dx\ +(2x^2-y)dy$

5.8. $\int (4+xy^2)dx+(x^2y+2y)dy$

5.9. $\int (2xy+8)dx+(x^2+2y)dy$

5.10. $\int (5x^2-3y)dx+(y^2-3x)dy$

Решить задания 5.11—5.20.

5.11. $\int (x-y)dx\ -(x-2y)dy$

5.12. $\int (2+xy)dx+\left(\frac{x^2}{2}-y\right)dy;$

5.13. $\int (x^3-2y)dx-(2x-5)dy$

5.14. $\int (2x-3y)dx-(3x-4y)dy$

5.15. $\int (4+xy^2)dx+(x^2y-3y^2)dy$

5.16. $\int (3x-2y)dx-(2x+y)dy$

5.17. $\int (1+2xy\ )dx\ +(x^2-y)dy$

5.18. $\int (5x-2y)dx-(2x-y)dy$

5.19. $\int (3x^2-y)dx-(x++2y)dy$

5.20. $\int (4xy+3)dx+\left(2x^2-\frac{3}{2}y^2\right)dy$

Решение типового примера

Вычислим криволинейный интеграл

$$I=\int \left(x^2+3xy\right)dx+\left(\frac{3}{2}x^2+y\right)dy$$

по контуру, соединяющему точки M (1; 1) и N (2; 3), предварительно убедившись в независимости его от пути интегрирова ия.

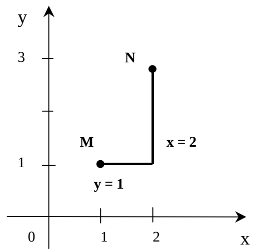
В да о случае выпол е о условие езависи ости криволи ей ого и теграла от пути и тегрирова ия

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

где $P = x^2 + 3xy, \quad Q = \frac{3}{2}x^2 + y.$

Действительно, $\frac{dP}{dy} = 3x, \quad \frac{dQ}{dx} = 3x.$

Выберем в качестве контура интегрирования наиболее простой контур, связывающий точки M и N, напри ер, ло а ую, звенья которой параллельны осям координат:



Имеем на первом участке

$$y = 1,\ dy = 0,\ 1 \le x \le 2;$$

на втором участке

$$x = 2,\ dx = 0,\ 1 \le y \le 2.$$

Таким образом,

$$I = \int_1^2 \left(x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 (6 + y)dy = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \left(6y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 22\frac{5}{6}.$$

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 4

Тема 1. Числовые и функциональные ряды

Рекомендуемая литература: [**1**], гл. 16, § 1—3, 6—8, 13, 17, 19—21; гл. 17, § 1—6; [**2**], ч. II, гл. 3, § 1—6, 8.

Прежде че приступить к реше ию задач этой те ы, еобходи о изучить приз аки сходи ости для числовых рядов: необходи ый признак сходи ости ряда; основные свойства сходящихся рядов; достаточные признаки сходимости, ос ова ные на сравнении рядов; признак сходимости Дала бера; и тегральный признак сходимости Коши; признак Лейб ица. Далее следует изучить понятия абсолютной и условной сходи ости числовых рядов, а также способ нахождения радиуса сходимости степенного ряда.

В задачах на приближенное вычисление определе ого и теграла с помощью разложения подынтегральной фу кции в ряд потребуются следующие разложения элементарных фу кций в степенные ряды:

1) $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots; \quad (-\infty < x < \infty);$

2) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots; \quad (-\infty < x < \infty\ );$

3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots; \quad (-\infty < x < \infty\ );$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \ldots; \quad (-1 < x < 1\ ).$

При изучении рядов Фурье обратите внимание а способы разложения в ряд Фурье функции, заданных на отрезке [0; e]. Если эту функцию продолжить на отрезок [$-e$; 0] чет ы образом, то полученное при этом разложение в ряд Фурье будет содержать лишь косинусы кратных дуг и будет представлять да ную функцию на заданном отрезке [0; e]. Аналогично поступают, если требуется представить функцию, заданную а отрезке [0; e], тригонометрическим рядом, содержащи лишь си усы кратных дуг.

Вопросы для самопроверки

1. Какой ряд называется сходящимся (расходящи ся)?
2. Сформулируйте необходимое условие сходи ости ряда.
3. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.

4. В че состоит приз ак Дала бера?
5. Для каких рядов при е яется приз ак Лейб ица? В че его сущность?
6. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
7. Сформулируйте теорему о почленном диффере цировании степенного ряда.
8. Как вычисляются коэффициенты ряда Маклоре а для заданной функции?
9. Напишите разложения в ряд Маклорена фу кций e^x, $\sin x, \cos x, \operatorname{arctg} x, \arcsin x, (1+x)^n$.
10. Как используются степенные ряды в приближе ых вычислениях?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Задание 1. В задачах 1.1—1.10 исследовать сходи ость рядов, пользуясь признаком Даламбера.

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$ **1.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{n/2}}$

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$ **1.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+1)}{5^n}$

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ **1.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ **1.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)5^n}$

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$ **1.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(n+2)}$

В задачах 1.11—1.20 исследовать сходимость рядов, пользуясь интегральным признаком сходимости Коши.

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^3}$ **1.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^{n/2}}}$

1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n(2n+1)}$

1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+4n^2}$

1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{e^{n^2}}$

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}$

1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+1}$

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$

Решение типового примера

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n(n+1)}$.

Решение. Общий член ряда

$$u_n = \frac{5^n}{n(n+1)},$$

тогда $u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

Применяем признак Даламбера и вычисляе предел:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\cdot n(n+1)}{(n+1)(n+2)\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+2} = 5\,.$$

Так как $d > 1$, то ряд расходится.

Задание 2. В задачах 2.1—2.20 дан степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n x^n}{b^n \sqrt[k]{n}}$.

Написать первые четыре члена ряда, найти интервал сходимости ряда и выяснить вопрос о сходимости ряда а ко цах интервала. Значения *a, b* и *k* даны.

2.1. $a = 2, b = 3, k = 4$;
2.2. $a = 3, b = 4, k = 5$;
2.3. $a = 4, b = 3, k = 3$;
2.4. $a = 5, b = 6, k = 2$;
2.5. $a = 3, b = 7, k = 3$;
2.6. $a = 6, b = 5, k = 3$;
2.7. $a = 5, b = 2, k = 4$;
2.8. $a = 2, b = 3, k = 5$;
2.9. $a = 3, b = 5, k = 6$;
2.10. $a = 2, b = 7, k = 3$;

2.11. $a=7,\ b=5,\ k=4;$

2.12. $a=5,\ b=7,\ k=4;$

2.13. $a=3,\ b=8,\ k=5;$

2.14. $a=4,\ b=7,\ k=3;$

2.15. $a=2,\ b=5,\ k=3;$

2.16. $a=4,\ b=5,\ k=3;$

2.17. $a=6,\ b=7,\ k=4;$

2.18. $a=5,\ b=8,\ k=2;$

2.19. $a=8,\ b=3,\ k=4;$

2.20. $a=9,\ b=2,\ k=5.$

Решение типового примера

Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)7^n}\ x^n.$ Определить характер сходимости ряда на концах и тервала сходимости.

Решение. Запишем заданный ряд следующи образо :

$$\frac{1}{2\cdot 7}x+\frac{1}{3\cdot 7^2}x^2+\ldots+\frac{1}{(n+1)7^n}x^n+\frac{1}{(n+2)7^{n+1}}+\ldots$$

Общий член ряда $u=\frac{1}{(n+1)7^n}\,x^n.$

Для исследования ряда на абсолютную сходи ость при еним признак Даламбера:

$$d=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(u_{n+1})}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}7^n}{7^{n+1}(n+2)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\frac{n+1}{n+2}|x|=$$

$$=\frac{1}{7}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{7}|x|\ .$$

Таким образом, при $\frac{1}{7}|x|<1$, то есть при $-7<x<7$ исходный ряд сходится абсолютно.

Выясним вопрос о сходимости ряда на концах и тервала сходимости, то есть в точках $x=-7$, $x=7$. При $x=\ 7$ зада ный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)7^n}(-7)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)7^n}(-1)^n7^n=\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^n\frac{1}{n+1}.$$

Это числовой знакочередующийся ряд. Его общий чле по абсолютной величине монотонно убывает и стре ится к улю при $n \to \infty$. Таки образо , оба условия приз ака Лейб и а выпол е ы, и ряд сходится (услов о), т. е. точка $= 7$ принадлежит области сходи ости заданного степенного ряда.

При $x = 7$ исходный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)7^n}(-7)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots$$

Это числовой знакоположительный ряд, который, очевидно, расходится (сравните его с гармоническими рядо). Следовательно, точка $x = 7$ не принадлежит области сходи ости заданного степенного ряда.

Таким образом, область сходимости исходного степе о-го ряда $-7 < x < 7$. Вне этого интервала ряд расходится.

Задание 3. В задачах 3.1—3.20 требуется вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предваритель о-го разложения подынтегральной функции в ряд и почле ого интегрирования этого ряда.

3.1. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$

3.2. $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}$

3.3. $\int_0^1 x\cos\sqrt{xdx}$

3.4. $\int_0^{-1} \sqrt{xe^{-x^2}}\,dx$

3.5. $\int_0^{1/4} xe^{-\sqrt{x}}dx$

3.6. $\int_0^{1/2} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$

3.7. $\int_0^1 x^2\cos\sqrt{xdx}$

3.8. $\int_0^{1/4} x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

3.9. $\int_0^1 x\sqrt{x}\sin\sqrt{xdx}$

3.10. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$

3.11. $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

3.12. $\int_0^1 e^{-0,1x^3}dx$

3.13. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[4]{\left(1+x^4\right)^3}}$

3.14. $\int_0^{1/4} \frac{\sqrt{xdx}}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

3.15. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$

3.16. $\int_0^{1/3} \frac{\sin 3x}{x} dx$

3.17. $\int_0^{1/4} \frac{\sin 4x}{x} dx$

3.18. $\int_0^{1/2} x \cos \sqrt{2xdx}$

3.19. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x} dx$

3.20. $\int_0^{1/2} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} dx$

Решение типового примера

Вычислить с точность до 0,001 интеграл: $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 e^{-x^2} dx$ путе предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

Решение. В разложении функции e^x в степенной ряд

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

заменим x на $-x^2$. Тогда получим

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(-x^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-x^2\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(-x^2\right)^n + \ldots$$

Умножая этот ряд почленно на x^2**,** будем и еть

$$x^2 e^{-x^2} = x^2 - \frac{1}{1!}x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \ldots..$$

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x^2 - \frac{1}{1!}x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \ldots\right] dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{1!}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2!}\frac{x^7}{7} - \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} - \frac{1}{160} + \frac{1}{1792} - \ldots$$

Получе ый з акочередующийся ряд удовлетворяет условия приз ака Лейб ица. Третий чле этого ряда по абсолютной величине еньше 0,001, поэто у для обеспече ия требуемой точности нужно просуммировать первые два чле а ряда.

Итак,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{160} = 0{,}048 .$$

Задание 4. В задачах 4.1—4.20 разложить функцию $f(x)$ ряд Фурье по косинусам на отрезке [0; p].

4.1. $f(x) = x - 2$

4.2. $f(x) = 1 - 2x$

4.3. $f(x) = 3x$

4.4. $f(x) = 2x + 1$

4.5. $f(x) = 1 - x$

4.6. $f(x) = -x - 1$

4.7. $f(x) = 2x - 1$

4.8. $f(x) = \pi - x$

4.9. $f(x) = \pi - 2x$

4.10. $f(x) = \frac{\pi}{2} + x$

4.11. $f(x) = 3x + 1$

4.12. $f(x) = -\pi + \frac{1}{4}x$

4.13. $f(x) = -2x + 3$

4.14. $f(x) = 7x - 1$

4.15. $f(x) = \pi x + 2$

4.16. $f(x) = \pi x + 1$

4.17. $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$

4.18. $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2x$

Решение типового примера

Разложить функцию $f(x)$= $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке [0; π].

Решение. Так как по условию ряд должен содержать только косинусы кратных дуг, то следует продолжить задан ую фу -кцию на отрезок [–π, 0]. четным образом.

Для определения коэффициентов ряда Фурье при е яе формулы

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right)\cos nx\, dx, \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Последний интеграл вычисляем методом интегрирова ия по частям, полагая $u = \pi - 2x$, $dv = \cos nxdx$.

Отсюда

$$du = -2dx, \quad v = \int \cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\left((\pi - 2x)\frac{\sin nx}{n} \right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nxdx \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{четное}, \\ \dfrac{2}{n^2\pi}, \text{ если } n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

СОДЕРЖАНИЕ

Методические рекомендации

по дисциплине «Математический анализ»

Для студентов-заочников специальности «Телекоммуникации»

В 2 частях

Часть II

Составитель
Бондарева Елена Владимировна

Главный редактор *А.В. Шестакова*
Редактор *Н.В. Горева*
Технический редактор *Е.А. Мальченко*

Подписано в печать 26.11.02. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 2,56.
Уч.-изд. л. 2,75. Тираж 50 экз. Заказ .

Издательство Волгоградского государственного университета.
400062, Волгоград, ул. 2-я Продольная, 30.