

№ 2. Найти объем тела, ограниченного заданными плоскостями $x^2 + y^2 = 4, z = x^2 + y^2, z = -1$

Решение:

Тело ограничено с боков – цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 4$, сверху – параболоидом $z = x^2 + y^2$ (параболоид пересекает цилиндр $x^2 + y^2 = 4$ по окружности радиусом 2 в плоскости $z = 4$). Снизу тело ограничено плоскостью $z = -1$. Проекция тела на плоскость Oxy (область D) – круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

Найдем объем тела по формуле:

$$V = \iint_D dx dy \int_{-1}^{x^2+y^2} dz = \iint_D z \Big|_{-1}^{x^2+y^2} dx dy = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy.$$

Преобразуем двойной интеграл к полярным координатам: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi$, получим:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r^2 + 1) r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r^3 + r) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^2 d\varphi =$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\varphi = 6\varphi \Big|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

Ответ: $V = 12\pi$.

