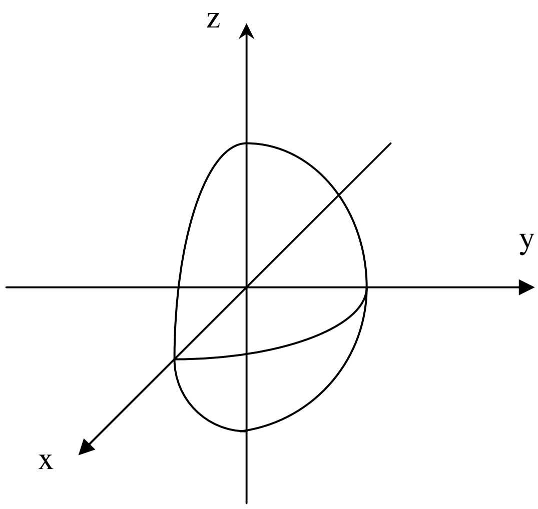
Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} y^2dzdx + z^2dxdy$**, где S – внешняя сторона поверхности полусферы** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0.$

РЕШЕНИЕ

Участок S представляет собой четвертую часть сферы, расположенную в положительных областях координатных осей x и y. На плоскости yOx этот участок дважды проецируется в четверть круга D_{yx}.



Т.к. внешние нормали для z > 0 образуют с осью z острые углы, а при z < 0 – тупые, то

$$\iint\limits_{(S)} z^2dxdy = \iint\limits_{S(z>0)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy - \iint\limits_{S(z<0)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 0$$

Проекция поверхности на плоскость zOx – полукруг D_{zx}, а внешняя нормаль к поверхности образует с осью y острый угол, значит

$$\iint\limits_{(S)} y^2dzdx = \iint\limits_{Dzx} (a^2 - x^2 - z^2)dzdx = \left\{\begin{matrix} \textit{переходим к} \\ \textit{полярным} \\ \textit{координатам} \end{matrix}\right\} = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} (a^2 - r^2)rdr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^a d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \frac{a^4}{4} d\varphi = \frac{\pi \cdot a^4}{4}$$